207 — Prolongement de fonctions - Exemples et Applications

Déf 1 Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $E \subseteq G$ et $g : G \to F$, g prolonge f si $g|_E = f$.

I) Prolongement de la fonction de la variable réelle

Cadre : I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $c \in I$, et $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$

1) Par continuité

Déf 2 f admet un prolongement continu en c s'il existe $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{I \setminus \{c\}} = f$, g continue en c.

Ex 3 1) $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement continu en 0.

2) $x \in \mathbb{R}^* \mapsto x \sin(1/x)$ admet un prolongement continu en 0.

Remarque 4 : Le 2ème prolongement n'est pas dérivable en 0. On identifiera désormais f et son prolongement.

2) Prolongement C^k

Définitions 5 : Soit $k \in \overline{\mathbb{N}}$, on dit que $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ admet un prolongement C^k en c si $\exists g : I \to \mathbb{R}$ C^k en c tel que $g|_{I \setminus \{c\}} = f$.

Ex 6 : $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement C^∞ en 0.

Prop 7 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $c \in I$ si f est dérivable sur $I \setminus \{c\}$, et $\lim_{x \to c} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ existe, alors f est C^1 en c.

Corollaire 8 : Si $f : I \to \mathbb{R}$, C^0 et C^k sur $I \setminus \{c\}$ supposons que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\lim_{x \to c} f^{(i)}(x)$ existe, alors f est C^k en c.

Ex 9 : $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Application 10 : Soit $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$, et $K \subseteq I$ un compact, alors $\exists \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\chi = 1$ sur K, $0 \leq \chi \leq 1$ et $\text{supp}(\chi) \subseteq I$

II) Prolongement dans les espaces fonctionnels

1) Applications continues

Théorème 11 : Soient (E, d_E) un espace métrique, (F, d_F) un espace métrique complet et $D \subseteq E$ une partie dense de (E, d_E), $f : D \to F$ uniformément continue. Alors, f admet un unique prolongement $\tilde{f} : E \to F$ uniformément continu.

Remarque 12 : L'hypothèse de complétude est indispensable
$E = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$, $f : \begin{bmatrix} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ x \mapsto x \end{bmatrix}$, $F = E$.

Application 13 : (Intégrale de Riemann). $A = \{f$ constante par morceaux sur $[0, 1]\}$, on définit l'intégrale de Riemann sur I_n, et on l'étend sur $C^0([0, 1], \mathbb{R}) \subseteq \overline{A}$.

Application 14 (Ascoli) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, E compact, et F complet. Soit $A \subseteq C^0(E, F)$, alors

A est relativement compact dans $(C^0(E, F), d_\infty)$

ssi

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall f \in A, \forall (x, y) \in E^2, d_E(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$

2) $\forall x \in E$, $A(x) := \{f(x), f \in A\}$ est relativement compacte dans (F, d_F)

Lemme 15 : On définit $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-i\, x \cdot \xi)\, dx$

1) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\partial^\alpha \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(\xi \mapsto (-i\xi)^\alpha f(\xi))$

2) $\forall \beta \in \mathbb{N}^d$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(\partial^\beta f) = \xi^\beta \mathcal{F}(f)$

3) $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue

4) $\forall \sigma > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) := \exp\left(-\frac{x^2 \sigma}{2}\right)$

alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}} \exp\left(-\xi^2/2\sigma\right)$

Application 16 :

$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x} \frac{d\xi}{(2\pi)^d}$$, $\mathcal{F}$ est un isomorphisme

et $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$

En particulier, $\mathcal{F}$ s'étend sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ de manière unique

Théorème 17 (Tietze) : soient (E, d_E) un espace métrique et $Y \subseteq E$ un fermé, soit $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
Alors, il existe $g : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $g|_Y = f$

Application 18 : Soit (E, d_E) un espace métrique et F_1, F_2 deux fermés de E. Alors il existe $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $f|_{F_1} = 0$ et $f|_{F_2} = 1$.

2) Formes linéaires :

Théorème 19 : (Hahn-Banach, forme algébrique réelle)
Soit E un EV sur $\mathbb{R}$, $p : E \to \mathbb{R}$ telle que
1) $\forall x \in E$, $\forall \lambda > 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$
2) $\forall (x,y) \in E^2$, $p(x+y) \le p(x) + p(y)$
Soit G un sev de E, et $g \in G^*$ telle que $\forall x \in G$, $g(x) \le p(x)$.
Alors, $\exists f \in E^*$ telle que $\begin{cases} f|_G = g \\ \forall x \in E,\ f(x) \le p(x) \end{cases}$

Application 20 (Hahn-Banach, forme topologique)
Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un Evn normé, G un sev de E et $g \in G'$

Alors, $\exists f \in E'$ telle que $\begin{cases} f|_G = g \\ \|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} \end{cases}$

Proposition 21 : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un Evn normé, et $x \in E$
Alors, $x = 0 \Leftrightarrow (\forall f \in E', \ f(x) = 0)$

Proposition 22 : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un Evn normé, et $F \subseteq E$ un sev, $x_0 \in E$, alors
$x_0 \in \overline{F} \Leftrightarrow (\forall f \in E', \ f|_F = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0)$

Application 23 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n, a_n > 1$ et $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, Soit $f_n : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x - a_n}\end{array}$, alors
$\overline{\mathrm{Vect}(f_n, n \in \mathbb{N})}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

III) Prolongement analytique :

1) Rappels.

Prop 24. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe alors f est développable en série entière au voisinage de tout point de D.

Prop 25 (Prolongement de Riemann)
Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorphe et $c \in D$, alors, f admet un prolongement holomorphe au voisinage de c ssi $\lim_{z \to c} (z-c) f(z) = 0$

Application 26 : Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, $c \in D$, $f : D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorphe ayant un pôle d'ordre n en c, alors
$\exists ! (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, $\exists ! g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que
$\forall z \in D \setminus \{c\}$, $f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{(z-c)^k}$.

Théorème 27 (zéros isolés) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, connexe, et $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorphes, alors

$f =_D g \iff \{z \in D,\ f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation.

2) Exemple de prolongement :

Définition 28 : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$, on définit

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

Proposition 29 : 1) Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$

2) $\forall z \in \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Théorème 30 : La fonction Γ admet un unique prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$. Ce prolongement est méromorphe sur $\mathbb{C}$, ayant des pôles simples en $-k$, $k \in \mathbb{N}$, avec $\mathrm{Res}_{-k}(f) = \frac{(-1)^k}{k!}$

De plus, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

IV) Prolongement des solutions d'EDO :

Définition 31 : Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$. Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$. Le problème de Cauchy (E) est la recherche d'un intervalle ouvert $J \subseteq I$, $t_0 \in J$, et $y : J \to \Omega$ dérivable telle que

$$(E) : \begin{cases} \forall t \in J,\ y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Théorème 32 : Si f est C^0, et localement lipschitzienne en la seconde variable, alors (E) admet une unique solution maximale (J, y) définie sur un intervalle ouvert

Ex 33 : $\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet 2 solutions $\begin{cases} y(t) = 0 \\ y(t) = t^2/4 \end{cases}$

Théorème 34 : Si $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne, alors si $(J =]T^-, T^+[, y)$ est la solution maximale, alors

$$\begin{cases} \text{Soit : } \sup(I) = T^+ \\ \text{Soit } \sup(I) > T^+, \text{ et } \|y(t)\|_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow[t \to T^+]{} +\infty \end{cases}$$

Exemple 35 : Soit $U \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{\|x\| \to +\infty} U(x) = +\infty$. Les solutions maximales de

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -\nabla U(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

sont globales ($J = \mathbb{R}^+$)

V) Extension de la notion de fonction

Définition 36 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $T : D(\Omega) \to \mathbb{K}$ linéaire est une distribution si :

$\forall K$ compact, $\exists C_K > 0$, $\exists p_K \in \mathbb{N}$ / $\forall \varphi \in D(\Omega)$, $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq K$,

$$|\langle T, \varphi \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)}| \leq C_K \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq p_K}} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

On note $T \in D'(\Omega)$

Proposition 37 : Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors

$$T_f : \left[\begin{array}{l} D(\Omega) \to \mathbb{K} \\ \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \end{array} \right] \in D'(\Omega), \text{ et}$$

$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$ est injective.

Exemple 38 $\delta_0 \in D'(\Omega)$ n'est pas associée à une fonction $L^1_{loc}(\Omega)$