Lemme de Schwarz et automorphismes du disque

Vincent LOUATRON

Leçons concernées :

1 Énoncés

Notations : $\Delta = \overset{\circ}{D}(0,1)$, $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Lemme 1 (Schwarz)**.** *Soit $f : \Delta \to \Delta$ avec $f(0) = 0$. Alors*

$$\forall z \in \Delta, |f(z)| \leq |z| \text{ et } |f'(0)| \leq 1$$

Si de plus il existe $c \in \Delta \setminus \{0\}$ tel que $|f(c)| = |c|$ ou, pour le cas $c = 0$, $|f'(0)| = 1$, alors f est une rotation.

Théorème 2. *L'ensemble des automorphismes du disque est $\left\{z \mapsto \eta \frac{z-w}{\overline{w}z-1}, \eta \in \partial\Delta, w \in \Delta\right\}$.*

2 Démonstrations

(i) Soit $f \in \mathscr{H}(\Delta)$ telle que $f(0) = 0$.

Soit $z \in \Delta \setminus \{0\}$ et $|z| < r < 1$ de manière à avoir $\overline{\Delta_{0,r}} \subset \Delta$.

On considère $g : w \in \Delta \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{f(w)}{w}$, qui est holomorphe sur $\Delta \setminus \{0\}$. En fait, puisque $f(0) = 0$, on a une singularité apparente et donc g est prolongeable par holomorphie sur Δ. Par principe du maximum sur le disque Δ, il vient

$$|g(z)| \leq \max_{\partial\Delta_{0,r}} |g| = \max_{\theta \in [0,2\pi]} |g(re^{i\theta})| = \frac{|f\left(re^{i\theta}\right)|}{|re^{i\theta}|} < \frac{1}{r}$$

En passant à la limite lorsque $r \to 1$ on obtient l'inégalité (large) suivante :

$$|g(z)| \leq 1 \tag{2.1}$$

d'où on déduit $|f(z)| \leq |z|$ pour $z \in \Delta \setminus \{0\}$. Puisque l'on a prolongé par holomorphie en 0 on a également $|g(0)| = |f'(0)| \leq 1$.

(ii) Si on a un $c \neq 0$ tel que $|f(c)| = |c|$, on a alors $|g(c)| = 1$ et on retrouve le cas d'égalité dans le principe du maximum, et donc g est constante sur Δ. Dit autrement, il existe une constante $a \in \partial\Delta$ telle que

$$\forall z \in \Delta, f(z) = az.$$

Dans le cas où $|f'(0)| = 1$, on a $|g(0)| = 1$ et donc par (2.1) il s'agit du cas d'égalité dans le principe du maximum. On conclut de la même manière que précédement.

(iii) • **Sens direct.** Soit $f \in Aut(\Delta)$ fixant 0. On est dans le cadre de (i) et (ii). Donc d'après (2.1), on a $\forall z \in \Delta$, $|f(z)| \leq |z|$. En particulier, $\forall w \in \Delta$, $|w| \leq |f^{-1}(w)|$ où on a pris $w = f(z)$ dans l'égalité précédente (ce qui est légitime car f est bijective).
D'autre part, on a aussi $f^{-1} \in Aut(\Delta)$ qui fixe 0 donc on peut appliquer à nouveau (2.1) sur f^{-1}. On obtient $|f^{-1}(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \Delta$. A ce stade on a donc $|f^{-1}(z)| \leq |z| \leq |f^{-1}(z)|$. Par (ii), f^{-1} est donc une rotation, et donc f également (rotation d'angle opposé).

• **Sens réciproque.** On vérifie aisément que toute rotation définit une permutation de Δ, de réciproque la rotation d'angle opposé. L'holomorphie est aussi facilement vérifiée à partir de l'expression $f(z) = az$ (remarque : $a = e^{i\theta}$ avec θ un argument de la rotation).

(iv) Montrons le lemme suivant : on se donne un sous-groupe F de $Aut(\Delta)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \exists c \in \Delta, \{g \in Aut(\Delta), g(c) = c\} \subset F \\ \forall z_1, z_2 \in \Delta, \exists f \in F, f(z_1) = z_2 \text{ (transitivité)} \end{cases}$$

et l'on va montrer que ce sous-groupe est en fait $Aut(\Delta)$ tout entier.
Soit $g \in Aut(\Delta)$. Si $g(c) = c$, on a $g \in F$. Supposons que ce ne soit pas le cas.
On a $g(c) = c' \in \Delta$ avec $c' \neq c$. Par transitivité de l'action de F sur Δ, il existe $f \in F$ telle que $f(c') = c$, c'est à dire $(f \circ g)(c) = c$.
$f \circ g$ est la composée d'automorphismes de Δ envoyant c sur c, donc appartient à F. De plus, $f^{-1} \in F$ car F est un groupe. On en déduit donc que $f^{-1} \circ f \circ g = g \in F$.
Ainsi, $F = Aut(\Delta)$. On va maintenant montrer que l'ensemble $F_0 := \left\{ z \mapsto \eta \dfrac{z - w}{\overline{w}z - 1}, \eta \in \partial\Delta, w \in \Delta \right\}$ vérifie les conditions précédentes.
Montrons que F_0 contient un groupe d'isotropie. D'après (iii), le groupe des rotations de $Aut(\Delta)$ est exactement le groupe d'isotropie pour $c = 0$. En particulier, il est contenu dans F en considérant les $\varphi_{\eta,0} : z \mapsto \eta z$.
Montrons que F_0 est un sous-groupe de $Aut(\Delta)$. On vérifie tout d'abord que tout $\varphi_{\eta,w}$ de la forme $z \mapsto \eta \dfrac{z - w}{\overline{w}z - 1}$ est holomorphe (car $|\overline{w}z| < 1$ donc le dénominateur ne s'annule pas sur Δ) et

bijective d'inverse $\varphi_{\overline{\eta},w\eta}$:

$$\eta\frac{z-w}{\overline{w}z-1}=u \Longleftrightarrow z(\eta-u\overline{w})=\eta w-u$$
$$\Longleftrightarrow z=\frac{\eta w-u}{\eta-u\overline{w}}=\frac{w-u\overline{\eta}}{1-\overline{w\eta}u}=\overline{\eta}\frac{u-(w\eta)}{\overline{(w\eta)}u-1}$$

où on a utilisé $\eta\overline{\eta}=1$. Donc F_0 est bien un sous-ensemble de $Aut(\Delta)$ stable par inverse. Il nous reste à vérifier que F_0 est stable par composition, ce qui est en fait la partie la moins triviale de cette preuve. On pourra trouver les détails aux pages 87-88 de [Rem]. L'idée est la suivante :
Il est relativement aisé de constater que l'ensemble suivant est un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{C})$:

$$M=\left\{B=\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix} a,b\in\mathbb{C}, det(B)=1\right\}$$

Fort de ce constat, on va maintenant montrer que toute matrice de la forme $A_{\eta,w}=\begin{pmatrix} \eta & -\eta w \\ \bar{w} & -1\end{pmatrix}$, décrivant l'élément $\varphi_{\eta,w}\in F_0$, peut s'écrire sB avec $s\in\mathbb{C}^\times$ et $B\in M$, et ce de manière unique. Cela montrera donc que l'ensemble des matrices de cette forme est un groupe. On remarque par ailleurs, par un calcul élémentaire, que le produit matriciel $A_{\eta,w}A_{\mu,v}$ est exactement la matrice décrivant l'application $\varphi_{\eta,w}\circ\varphi_{\mu,v}$. On pourra donc, une fois rendu à ce stade, conclure. Montrons donc le résultat annoncé.
Soient $w\in\Delta$ et $\eta\in\partial\Delta$. On remarque que $\dfrac{-\eta}{1-|w|^2}$ est non nul car $|w|<1$. On peut donc en considérer une racine a, c'est à dire vérifiant $a^2=\dfrac{-\eta}{1-|w|^2}$. En posant $b:=-wa$ il vient

$$|a|^2-|b|^2=|\eta|\frac{1-|w|^2}{1-|w|^2}=|\eta|$$

et on pose alors $B:=A_{\eta,w}=\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\in M$. On pose enfin $s:=\dfrac{\eta}{a}=-a(1-|w|)\in\mathbb{C}^\times$ et on obtient $sB=\begin{pmatrix} \eta & -\eta w \\ \bar{w} & -1\end{pmatrix}$.

Montrons que l'action de F_0 sur Δ est transitive.[1] Soient $z,z'\in\Delta$.

1. Une première idée serait, pour $z,z'\in\Delta$, de prendre $\varphi_{z',1}$, cependant $1\notin\Delta$ donc $\varphi_{z',1}\notin F_0$.

On remarque tout d'abord que l'on peut atteindre tout point $w \in \Delta$ à partir du point 0 avec $\varphi_{1,w}$ (autrement dit, l'orbite de 0 recouvre Δ en entier). En particulier, $\varphi_{1,z}, \varphi_{1,z'} \in F_0$ vérifient $\varphi_{1,z} = z$ et $\varphi_{1,z'} = z'$. De ceci on déduit, avec $\psi := \varphi_{1,z'} \circ \varphi_{1,z}^{-1}$, que $h(z) = z'$ et donc que l'action est bien transitive.

Références

[Rem] Reinhold Remmert, Theory of complex functions, Springer

[Rud] Walter Rudin, Analyse réelle et complexe, Dunod, 3e édition