157

Endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents

On se place sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en général).

I) Premières définition et propriétés

1) Généralités

Déf : Soit $u \in L(E)$. Une valeur propre de u est un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant $\mathrm{Ker}(\lambda id_E - u) \neq \{0\}$. Pour une valeur propre λ de u, l'espace $\mathrm{Ker}(\lambda id_E - u)$, noté E_λ, est appelé sous-espace propre de u associé à λ, et ses éléments non-nuls sont appelés les vecteurs propres de u associés à λ.

Déf : On appelle spectre de $u \in L(E)$ l'ensemble des valeurs propres de u (noté $Sp(u)$).

Déf : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $P_A(X) = \det(A - XI_n)$, et pour $f \in L(E)$, le polynôme caractéristique de f est celui d'une matrice associée (ne dépend pas du choix de la base).

Déf : Soit $f \in L(E)$, on appelle polynôme minimal de u le polynôme unitaire m_u qui engendre l'idéal annulateur de u.

Prop (Lemme des Noyaux) : les sous-espaces propres E_{λ_i} d'un endomorphisme $u \in L(E)$ associés aux valeurs propres λ_i sont en somme directe.

Prop : Soit $u \in L(E)$. On a l'équivalence entre :
(i) $\lambda \in Sp(u)$
(ii) $P_u(\lambda) = 0$
(iii) $m_u(\lambda) = 0$

Théorème (Cayley-Hamilton) : Soit $f \in L(E)$, on a $P_f(f) = 0$.

2) Endomorphismes trigonalisables

Déf : Un endomorphisme $f \in L(E)$ est trigonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Th : Soit $f \in L(E)$. On a l'équivalence entre :
(i) f est trigonalisable
(ii) P_f est scindé sur $\mathbb{K}$
(iii) m_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Cor : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme de $L(E)$ est trigonalisable.

Ex : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: $P_B = X^2 + 1$, B n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Rq : Si A est trigonalisable avec $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $Sp(A) = \{\lambda_i, i \in [\![1, n]\!]\}$

App : Soit u un endomorphisme trigonalisable avec $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Alors $Sp(\exp(u)) = \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\}$

Prop : Soit u un endomorphisme trigonalisable, si F est un sev stable par u alors $u_{|F}$ est trigonalisable.

3) Endomorphismes nilpotents

Déf : Soit $u \in L(E)$. u est un endomorphisme nilpotent s'il existe $p > 0$ tel que $u^p = 0$. Le plus petit entier p vérifiant $u^p = 0$ est appelé indice de nilpotence de u.
On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence entre :
(i) u est nilpotent
(ii) $P_u = (-1)^n X^n$
(iii) $m_u = X^k$ pour un certain k
(iv) u est trigonalisable avec $Sp(u) = \{0\}$.

Prop : u nilpotent $\iff$ pour tout $x \in E$, il existe $q \geq 1$ tel que $u^q(x) = 0$

Rq : C'est faux en dimension infinie (opérateur de dérivation dans $\mathbb{K}[X]$)

Prop : A matrice nilpotente $\iff \exists (A_q)_{q \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall q \in \mathbb{N}$, $A_q \sim A$ et $A_q \to 0$.

Lemme : Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, A nilpotente $\iff \forall k \in \mathbb{N}$, $tr(A^k) = 0$.

Contre-ex : si $car(\mathbb{K}) = q$, $tr(I_q^k) = 0$

Application (Théorème de Burnside) : Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini.

II Propriétés structurelles et topologiques

1) Endomorphismes trigonalisables

a) Trigonalisation simultanée

Déf : Une famille $X \subset \mathcal{L}(E)$ d'endomorphismes est cotrigonalisable s'il existe une base qui trigonalise tous ses éléments.

Prop : Soit $\{u_i\}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables. Si les u_i commutent deux à deux alors ils sont cotrigonalisables.

App (Théorème de Lie-Kolchin) : Tout sous-groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable [DEV 1] [Ch.L]

b) Propriétés topologiques

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $T_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : L'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes est dense dans $T_n(\mathbb{K})$.

Prop : $T_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{K})$.

2) Endomorphismes nilpotents

a) Structure de $\mathcal{N}$

Prop : $\mathcal{N}$ est un cône : pour tout $u \in \mathcal{N}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in \mathcal{N}$.

Prop : Soient u et v tels que u est nilpotent et $u \circ v = v \circ u$, alors $u \circ v$ est nilpotent et si v est nilpotent, $u + v$ est nilpotent.

Prop : $Vect(\mathcal{N}) = Ker(Tr)$.

b) Unipotence

On pose $\mathcal{U} = Id + \mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes unipotents.

Prop : On a l'équivalence entre :
(i) $u \in \mathcal{U}$
(ii) $P_u = (1-X)^n$
(iii) u est trigonalisable et $Sp(u) = \{1\}$

Prop : Soit $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\exp : \mathcal{N} \to \mathcal{U}$ est un homéomorphisme

App : $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$
$\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2 \mid A \in GL_n(\mathbb{R})\}$

III Décomposition et réduction

1) Noyaux itérés, sous-espaces caractéristiques

Prop-Déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists! \, r \in \mathbb{N} \mid \{0\} = Ker(u^0) \subsetneq Ker(u) \subsetneq \dots \subsetneq Ker(u^r) = Ker(u^{r+1}) = \dots$
r est appelé l'indice de u.

Prop : $E = Im(u^0) \supsetneq Im(u) \supsetneq \dots \supsetneq Im(u^r) = Im(u^{r+1}) = \dots$
$E = Ker(u^r) \oplus Im(u^r)$ avec $u_{|Ker(u^r)}$ nilpotente et $u_{|Im(u^r)}$ inversible

Rq : Si u est nilpotente alors r est l'indice de nilpotence de u et $E = \mathrm{Ker}(u^r)$.

Déf : Soit $u \in L(E)$ trigonalisable, $P_u = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_s)^{\alpha_s}$. Pour tout $i \leq s$, on appelle sous-espace caractéristique de u associé à λ_i l'ensemble $\mathrm{Ker}((u-\lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i})$, noté N_i.

Prop : $\cdot\ \forall i$, N_i est stable par u et $\dim N_i = \alpha_i$

$\cdot\ E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$

$\cdot\ \exists B,\ \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{smallmatrix}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{\begin{smallmatrix} \lambda_s & * \\ (0) & \lambda_s \end{smallmatrix}} \end{pmatrix}$

Th : Si u est trigonalisable alors : $P_u = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{r_i}$, $r_i \leq \alpha_i$

r_i est l'indice de $u - \lambda_i \mathrm{id}$

App : Calcul de m_u.

2) Décomposition de Dunford

Th : Soit $u \in L(E)$ trigonalisable, $\exists! (d, n) \in L(E)^2$ vérifiant :

- d diagonalisable, n nilpotente
- $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Application : Calcul de l'exponentielle de u.

3) Décomposition de Jordan

a) Endomorphismes nilpotents.

Déf : Un bloc de Jordan de taille p est une matrice $J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$

Rq : Soit f un endomorphisme nilpotent, soit B une base adaptée à l'inclusion stricte $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^1) \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{Ker} f^{r} = E$.
La matrice de f dans B est triangulaire supérieure stricte.
En particulier, soit f un endomorphisme nilpotent d'indice p, soit $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(f^{p-1})$. Pour tout $i \leq p-1$, $f^i(x) \in \mathrm{Ker}(f^{p-i}) \setminus \mathrm{Ker}(f^{p-i-1})$.
La famille $B = (x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est donc libre et stable par f ; la matrice de u dans cette base est J_p.

Lemme : Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence r. On a l'équivalence entre :

(i) $r = n$, c-à-d $P_u = (-1)^n X^n$ et $m_u = X^n$

(ii) $\exists x \,/\, (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

(iii) $\exists B \,/\, \mathrm{Mat}_B(u) = J$

Th : Soit $u \in \mathcal{N}$, $\exists B$ tel que $\mathrm{Mat}_B(u) = \mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_i} \end{pmatrix}$

avec $J_{p_i} \in M_{p_i}(\mathbb{K})$ et $\max\{p_i\} \leq r$.

b) Décomposition de Jordan dans le cas général

Th : Soit u trigonalisable avec $P_u = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_s)^{\alpha_s}$. Alors $\exists B$ tel que $\mathrm{Mat}_B(u) = \mathrm{Diag}(\mathcal{J}_{1,\lambda_1}, \dots, \mathcal{J}_{s,\lambda_s})$ avec $\mathcal{J}_{i,\lambda_i} = \lambda_i I_{\alpha_i} + \tilde{\mathcal{J}}_i$ avec $\tilde{\mathcal{J}}_i$ la matrice réduite de l'endomorphisme nilpotent $(u - \lambda_i \mathrm{Id})_{|N_i}$. [DEV2] [GOU]

Références :

[GOU] Algèbre, X. Gourdon
[TAU] Algèbre, P. Tauvel
[GRI] Algèbre linéaire, J. Grifone
[CH-L] Algèbre Corporelle, A. Chambert-Loir

Théorème de Lie - Kolchin

Théorème: [Lie-Kolchin]
Tout sous-groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable.

Démonstration:

On commence par montrer le lemme suivant:

Lemme 1: Soit G un sous-groupe connexe de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors son sous-groupe dérivé est connexe.

Démonstration du lemme 1:

On a $D(G) = \mathrm{Vect}\{ g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \mid g_1, g_2 \in G\}$

- On note S l'ensemble de tous les commutateurs de G.
  S est l'image de $G \times G$ par l'application continue $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$.
  Donc S est connexe.
- Soit S_m l'ensemble des produits de m éléments de S, avec $m \geq 1$.
  S_m est l'image de S^m par l'application $(g_1, \dots, g_m) \mapsto g_1 \cdots g_m$.
  S est connexe, donc S^m et S_m le sont aussi.
- L'inverse d'un commutateur en est encore un, donc $D(G) = \{e\} \cup \bigcup_{m \geq 1} S_m$.

Comme $e \in S_m$ $\forall m \geq 1$, $D(G)$ est connexe. $\square$

Démonstration du théorème :

Si G est abélien, alors c'est une famille d'endomorphismes commutant deux à deux, donc qui est cotrigonalisable.

On suppose donc G non abélien.

On va procéder par récurrence sur n, le cas d'initialisation étant résolu car G est abélien pour $n=0$.

On suppose donc que pour un $n>0$, le théorème est vrai pour toute dimension strictement inférieure à n.

- On montre que $\mathbb{C}^n$ possède un sous-espace vectoriel G-stable non trivial.
  - Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $D^{m-1}(G)$ soit commutatif mais non réduit au neutre.
    ($n>1$ car G est non abélien)
  - Soit $H = D^{m-1}(G)$.
  - P l'ensemble des vecteurs propres à tous les $h \in H$.
  - Pour $p \in P$, $\lambda_p(h)$ la valeur propre associée à p et à $h \in H$.

- Soit $v \in P$. (il en existe car H est commutatif par hypothèse sur m et est donc cotrigonalisable)
  H est un sous-groupe distingué de G, et l'on en déduit que $\forall g \in G$, $g(v) \in P$.
  (avec $\lambda_{g(v)}(h) = \lambda_v(g^{-1} h g)$ $\forall h \in H$)

- Pour h fixé, l'image de G par l'application $g \mapsto \lambda_{g(v)}(h)$ est finie car incluse dans le spectre de h, et connexe car l'application est continue.
  C'est donc un singleton.
  On a donc $\mathrm{Vect}(Gv)$ propre pour h.
  Par construction, ce sous-espace est stable par G et non réduit au vecteur nul.

- Si $\mathrm{Vect}(Gv)$ était égal à $\mathbb{C}^n$, chaque $h \in H$ serait une homothétie.
  Or, $h \in D(G)$, donc $\det(h) = 1$.
  Ainsi, $h = \omega\, id$ pour un certain ω racine n-ième de l'unité.
  L'ensemble des rapports d'homothétie des $h \in H$ serait donc fini mais aussi connexe (car H est connexe d'après le lemme 2) et donc réduit à $\{1\}$.
  On a une contradiction avec la définition de m. Donc $\mathrm{Vect}(Gv) \neq \mathbb{C}^n$.

- On a donc montré que $\mathbb{C}^n$ possédait un sous-espace vectoriel V, stable par G et dont la dimension serait strictement comprise entre 0 et n.

Ainsi, en considérant une base de V que l'on complète, on peut mettre les éléments g de G sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} \varrho_1(g) & \psi(g) \\ 0 & \varrho_2(g) \end{pmatrix}$$

avec $\varphi_1 : G \to GL_d(\mathbb{C})$ et $\varphi_2 : G \to GL_{n-d}(\mathbb{C})$ continues en tant que projections et sont des morphismes de groupes.

Or l'image d'un groupe résoluble par un morphisme de groupes est résoluble. L'image d'un connexe par une application continue est connexe, on applique donc l'hypothèse de récurrence, on exhibe deux bases dans lesquelles $\varphi_1(g)$ et $\varphi_2(g)$ sont triangulaires supérieures, pour tout $g \in G$, et on conclut en réunissant les deux bases.

$\square$

Référence :

Antoine Chambert-Loir, <u>Algèbre corporelle</u>, p 93

Réduction de Jordan

Nous allons commencer par étudier la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent.

Théorème 1: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent de E. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme:

$$\begin{pmatrix} 0 & v_1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ & (0) & & v_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } v_i \in \{0,1\} \ \forall i$$

Démonstration: Soit $r \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de u.
On note $F_i = \mathrm{Ker}(u^i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

On a donc $\{0\} = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{r-1} \subsetneq F_r = E$.
De plus, $\forall x \in F_i$, $u^{i-1}(u(x)) = u^i(x) = 0$, donc $u(x) \in F_{i-1}$, $u(F_i) \subseteq F_{i-1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$.

Nous allons montrer l'existence de sev $G_1, \dots, G_r$ et $H_1, \dots, H_{r-1}$ de E tels que

(i) $\forall i \in [\![0, r-1]\!]$, $F_{i+1} = G_{i+1} \oplus F_i$

(ii) $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, u applique injectivement G_{i+1} dans G_i.

(iii) $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $G_i = u(G_{i+1}) \oplus H_i$.

- On montre l'existence de G_r et H_{r-1}:

on pose G_r un supplémentaire de F_{r-1} dans F_r: $F_r = G_r \oplus F_{r-1}$.

$\mathrm{Ker}\, u \cap G_r = F_1 \cap G_r \subseteq F_{r-1} \cap G_r = \{0\}$
et $u(G_r) \subseteq u(F_r) \subseteq F_{r-1}$.
Donc u applique injectivement G_r dans F_{r-1}.

De plus, $u(G_r) \cap F_{r-2} = \{0\}$.

En effet : si $x \in u(G_r) \cap F_{r-2}$, soit $y \in G_r$ tel que $x = u(y)$, on a $u^{r-1}(y) = u^{r-2}(x) = \mathbf{0}$, donc $y \in F_{r-1} \cap G_r = \{0\}$, et donc $x = u(y) = 0$.

On a donc $u(G_r) \oplus F_{r-2} \subsetneq F_{r-1}$.

Soit H_{r-1} un sev de E tel que
$u(G_r) \oplus F_{r-2} \oplus H_{r-1} = F_{r-1}$.

On pose $G_{r-1} = u(G_r) \oplus H_{r-1}$ (un supplémentaire de F_{r-2} dans F_{r-1}), et on obtient $F_{r-1} = G_{r-1} \oplus F_{r-2}$, et u applique injectivement G_r dans G_{r-1}.

- Par une récurrence descendante sur i, pour $i \in \{1, \dots, r-2\}$, et une démonstration identique, on construit de proche en proche les G_i et les H_i.

On obtient donc :

$$\begin{cases} E = G_1 \oplus \cdots \oplus G_r \\ G_1 = F_1 = \operatorname{Ker} u \\ \forall i,\ 2 \le i \le r,\ u \text{ applique injectivement } G_i \text{ dans } G_{i-1}. \end{cases}$$

- On considère une base $(\varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,s_i})$ de G_i. $(u(\varepsilon_{i,1}), \dots, u(\varepsilon_{i,s_i}))$ est une famille libre de G_{i-1}, que l'on complète en une base de G_{i-1} par $(\varepsilon_{i-1,1}, \dots, \varepsilon_{i-1,s_{i-1}})$.

On écrit tous les vecteurs considérés dans le tableau suivant.

G_r	$\varepsilon_{r,1}$	--	ε_{r,s_r}									
G_{r-1}	$u(\varepsilon_{r,1})$	---	$u(\varepsilon_{r,s_r})$	$\varepsilon_{r-1,1}$	--	$\varepsilon_{r-1,s_{r-1}}$						
G_{r-2}	$u^2(\varepsilon_{r,1})$	---	$u^2(\varepsilon_{r,s_r})$	$u(\varepsilon_{r-1,1})$	--	$u(\varepsilon_{r-1,s_{r-1}})$	$\varepsilon_{r-2,1}$	---				
---	---	---	---	---	--	---	---	---				
G_1	$u^{r-1}(\varepsilon_{r,1})$	---	$u^{r-1}(\varepsilon_{r,s_r})$	$u^{r-2}(\varepsilon_{r-1,1})$	--	$u^{r-2}(\varepsilon_{r-1,s_{r-1}})$	$u^{r-3}(\varepsilon_{r-2,1})$	--	$\varepsilon_{1,1}$	--	ε_{1,s_1}	

En lisant le tableau de bas en haut et de gauche à droite, on obtient une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{E}$, telle que $u(e_j) = e_{j-1}$ si e_j n'est pas situé sur la dernière ligne, et $u(e_j) = \mathbf{0}$ sinon. Cette base convient donc au théorème.

$\square$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de réduction de Jordan pour des endomorphismes quelconques :

<u>Théorème 2 :</u> Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique P_f soit scindé sur K : $P_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$

$(\lambda_i \neq \lambda_j,\ \forall i \neq j)$

Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \text{ où } \forall i,\ A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & v_{i,\alpha_i - 1} \\ (0) & & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(K)$$

avec $\forall i, j,\ v_{ij} \in \{0, 1\}$.

<u>Démonstration :</u> Pour tout i, on note $N_i := \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}$ les sous-espaces caractéristiques de f.

On a $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$ et les N_i sont stables par f.

Pour tout i, on pose $n_i := f_{|N_i} - \lambda_i \, Id_{N_i}$. Par définition de N_i, n_i est nilpotent. D'après le théorème précédent, il existe une base de N_i dans laquelle la matrice de n_i est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & v_{i,1} & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & v_{i,\alpha_i-1} \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice de $f_{|N_i}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & v_{i,\alpha_i-1} \\ (0) & & & \lambda_i \end{pmatrix} =: A_i \text{ , avec } v_{i,j} \in \{0,1\} \ \forall i,j.$$

Comme $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$, on a bien le résultat voulu : il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_s \end{pmatrix}.$$

$\square$

Référence : Xavier Gourdon, <u>Algèbre</u>, p197