181

Barycentres dans un espace affine de dimension finie, convexité. Applications

Dans toute la suite, on notera E un espace affine réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

I - Barycentres. [SOR]

A - Définition et propriétés

<u>Déf 1</u> : Soient $A_1, \dots, A_d \in E^d$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}^d$ tq $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \neq 0$. Alors il existe un unique G tq $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \vec{GA_i} = \vec{0}$

G est dit barycentre du système $((A_i, \lambda_i))_{i \in \{1,\dots,d\}}$

De plus, pour tout $M \in E$, $\vec{MG} = \frac{1}{\sum \lambda_i} \left(\sum_i \lambda_i \vec{MA_i} \right)$

<u>Prop 2</u> : Le barycentre est inchangé par la multiplication de tous les poids par une même valeur $\lambda \neq 0$.

<u>Déf 3</u> : on appelle isobarycentre le barycentre associé aux points $A_1, \dots, A_d$ avec même poids λ.

<u>Ex 4</u> : • Le milieu I d'un segment est l'isobarycentre de ses extrémités.

• Le centre de gravité d'un triangle est l'isobarycentre de ses sommets.

<u>Thm 5</u> : $Bar((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)) = Bar((Bar((A,\alpha),(B,\beta)), \alpha+\beta),(C,\gamma))$

<u>Prop 6</u> : Relation de Chasles (Rappel) : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

B - Fonctions conservant le barycentre.

<u>Déf 7</u> : on dit que $f : E \to E$ conserve le barycentre si $f(Bar((A,\alpha),(B,\beta))) = Bar((f(A),\alpha),(f(B),\beta))$

<u>Prop 8</u> : $f : E \to E$ est affine ssi elle conserve le barycentre.

<u>Ex 9</u> : • Les homothéties

• Les translations.

C - Exemples

• <u>Dans le triangle</u> :

- Dans un triangle ABC, la médiane de $[BC]$ est la droite $(A\, Bar((B,\frac{1}{2}),(C,\frac{1}{2})))$.

- on montre par un raisonnement sur les barycentres qu'elles sont concourantes.

• <u>Dans un tétraèdre</u> :

- Les 4 hauteur du tétraèdre sont concourantes

II - convexité

A - Convexe et enveloppe convexe. [TAU]

<u>Déf 10</u> : Soit $a = (A_i)_{i \in I}$ une famille de points de E. Soit $B \in E$. on dit que B est combinaison convexe de a s'il existe une famille presque nulle $(t_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ tq $\sum_{i \in I} t_i = 1$ et $B = \sum_{i \in I} t_i A_i$

<u>Déf 11</u> : Une partie C de E est convexe si pour tout $A, B \in C$, $[AB] \subset C$

$\Leftrightarrow$ C est étoilé en tous ses points.

<u>Prop 12</u> : (i) Toute intersection de convexes est convexe.

(ii) Tout convexe est connexe par arcs.

(iii) $A \subset E$ est convexe ssi toute combinaison convexe de points de A est dans A.

(iv) L'application $(M,N) \mapsto tM + (1-t)N$ étant continue, l'adhérence d'un convexe est convexe.

<u>Ex 13</u> : • $B(0,R)$, $R > 0$ est convexe

• $Sym^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

<u>Déf 14</u> : Soit $A \subset E$. L'enveloppe convexe de A, notée $C_v(A)$, est l'intersection de tous les convexes contenant A.

Prop 15 : Soit $A \subset E$.

(i) $C_v(A) = \{ \sum_{i\in I} t_i a_i \mid a_i \in A, \sum_{i\in I} t_i = 1, (t_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$ presque nulle $\}$

(ii) $\bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ \text{fermé}, A\subset C}} C = \overline{C_v(A)}$

(iii) Si A est ouvert, $C_v(A)$ l'est aussi.

Thm 16 (Carathéodory) : Soit $A \subset E$. Tout élément de $C_v(A)$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de A avec $k \leq 1 + \dim E$.

Cor 17 : Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

(i) Si A est compacte, $C_v(A)$ est compacte.

(ii) Si A est bornée, alors $C_v(A)$ est bornée et $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(C_v(A))$

Ex 18 : l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est $\overline{B(0,1)}$ pour la norme euclidienne DVT 1

Lemme 19 : Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $P \in E$ et $\delta = d(P,A)$.

(i) Si A est fermée, il existe $a \in A$ tq $\delta = d(P,a)$

(ii) Si A est convexe, il existe au plus un $a \in A$ tq $\delta = d(a,P)$

(iii) Si A est un convexe fermé, il existe un unique $a \in A$ tq $\delta = d(P,a)$. a est la projection de P sur A.

Thm 20 (Motzkin) Soient A une partie fermée non vide de E. On suppose que, pour tout $P \in E$, il existe un unique $Q \in A$ tq $d(P,Q) = d(P,A)$. Alors A est convexe

B- Séparation et points extrémaux

Def 21 : Soit $H = \{x \in E, f(x) = \alpha\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ un hyperplan affine fermé de E. Quitte à remplacer (f,α) par $(-f,\alpha)$, on dit que H sépare $A \subset E$ et $B \subset E$:

(i) au sens large si $\forall (a,b) \in A \times B$, $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$

(ii) au sens strict si :

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall (a,b) \in A \times B$, $f(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(b)$

Thm 22 : (Hahn-Banach) [BRE]

Soient A et B deux convexes disjoints non vides de E.

(i) Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large

(ii) Si A est fermé et B est compact, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Cor 23 : Soit K un compact de E. Alors

$x \in C_v(K)$ ssi $\forall T \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, $T(x) \leq \sup_{y \in K} T(y)$.

App 24 : Thm de John.

Soit K un compact de E. On suppose que $\mathrm{Int}(K) \neq \emptyset$. Alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal qui contient K. DVT 2

Def 25 : Soit A un convexe de E. On dit que $M \in A$ est un convexe de E si toute égalité du type $M = tP + (1-t)Q$ avec $t \in [0,1]$, $P, Q \in A \Rightarrow M = P$ ou $M = Q$ ETA

On note $\mathrm{Extr}(A)$ l'ensemble des points extrémaux de A.

Ex 26 : • Si $O \in E$ et $R > 0$, $\mathrm{Extr}(\overline{B(O,R)}) = S(O,R)$

• $\mathrm{Extr}(B(O,R)) = \emptyset$.

Prop 27 : Soit A un convexe de E et $M \in A$. Alors ETA

(i) $M \in \mathrm{Extr}(A)$

$\Updownarrow$ (ii) $A \setminus \{M\}$ est convexe

$\Updownarrow$ (iii) Si M est combinaison convexe d'éléments de A : $\sum t_i A_i = M \Rightarrow \exists i$ tq $M = A_i$

[TAU] Thm 28: (Krein-Milman)

Pour tout convexe compact non vide A de E,
$A = Cv(Extr(A))$

Ex 29 : $O_n(\mathbb{R}) = Cv(Extr(O_n(\mathbb{R})))$

[BER] Thm 30 : (Helly) Soit $\mathcal{F}$ une famille de E de cardinal $> n+1$, famille de convexes. Si $\mathcal{F}$ vérifie:

(i) Toute sous famille à $d+1$ éléments de $\mathcal{F}$ est d'intersection non vide.

(ii) Tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont compacts ou $\mathcal{F}$ est finie.

Alors $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$

Cor 31 : Soit une famille finie $\mathcal{F}$ de segments parallèles admettant trois à trois une sécante commune. Alors la famille $\mathcal{F}$ toute entière admet une sécante commune.

C- Lien avec les fonctions convexes. [BER].

Def 32 : Soit $A \subset E$ un convexe. Une application $f: A \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $x, y \in A$, on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

Prop 33 : Soit $f: A \to \mathbb{R}$ où A est convexe. Alors f est convexe ssi l'épigraphe de f est convexe de $X \times \mathbb{R}$
où l'épigraphe de f est $Epigr(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : x \in A \text{ et } t \geq f(x)\}$

Prop 34 : Soit $f: A \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est continue en tout point de l'intérieur de A.

Prop 35 : Soit $f: A \to \mathbb{R}$ strictement convexe,
i.e $\forall t \in [0,1], \forall x, y \in A$, $f(tx+(1-t)y) < t f(x) + (1-t) f(y)$.
Si f atteint son minimum, c'est en un point unique.

Références

- [TAU] Cours de Géométrie, Patrice Tauvel
- [BER] Géométrie, Tome 2, Marcel Berger
- [SOR] Géométrie de l'espace et du plan, Yvonne et René Sortais
- [BRE] Analyse fonctionnelle, théorie et applications, H. Brezis
- [ALE] Thèmes de Géométrie. Groupes en situation géométrique, H. Alessandri (pour les développements)

DÉVELOPPEMENT 22

THÉORÈME DE JOHN

Ellipsoïde

Théorème de John. — *Un compact K de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur est contenu dans un unique ellipsoïde de volume minimal.*

Démonstration. — On note $\mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives et on définit une application $\mu : \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n}) \to \mathbb{R}$ en posant $\mu(S) = \frac{1}{\sqrt{\det S}}$. Si $R, S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$R = {}^tP \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix} P \quad \text{et} \quad S = {}^tP \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} P$$

où les r_i et s_j sont strictement positifs. La convexité de $\mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ assure que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $(1-t)R + tS \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ d'où

$$\begin{aligned}
\mu((1-t)R+tS) &= \mu({}^tP\mathrm{diag}((1-t)r_1 + ts_1, \dots, (1-t)r_n + ts_n)P) \\
&= \left(\det({}^tP)\prod_{i=1}^n((1-t)r_i + ts_i)\det(P)\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= |\det(P)|^{-1}\prod_{i=1}^n((1-t)r_i + ts_i)^{-\frac{1}{2}} \\
&= |\det(P)|^{-1}\prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}(\log((1-t)r_i+ts_i))} \\
&\leq |\det(P)|^{-1}\prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2}((1-t)\log(r_i)+t\log(s_i))}
\end{aligned}$$

par concavité du logarithme, puis

$$|\det(P)|\,\mu((1-t)R+tS) \leq \prod_{i=1}^n (r_i^{1-t}s_i^t)^{-\frac{1}{2}} \leq \left((\prod_{i=1}^n r_i)^{1-t}(\prod_{i=1}^n s_i)^t\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et par convexité de $t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t}$, on a (en notant $R = \prod r_i$ et $S = \prod s_i$)

$$|\det(P)|\,\mu((1-t)R+tS) \leq e^{-\frac{1}{2}((1-t)\log\prod r_i + t\log\prod s_i)} \leq (1-t)e^{-\frac{1}{2}\log\prod r_i} + te^{-\frac{1}{2}\log\prod s_i}$$

i.e. $\mu((1-t)R+tS) \leq (1-t)\mu(R) + t\mu(S)$ donc l'application μ est convexe sur $\mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$. De plus, le cas d'égalité nécessite $r_i = s_i$ pour tout i *i.e.* $R = S$ et μ est donc strictement convexe.

Notons que la boule unité $\mathbb{B}_S$ pour un produit scalaire défini par $S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ (*i.e.* pour un ellipsoïde) est l'image de la boule unité canonique $\mathbb{B}$ par $A = \sqrt{S^{-1}}$. En effet, on a

$$\|X\| \leq 1 \iff {}^tXX \leq 1 \iff {}^t(AX)S(AX) \leq 1 \iff AX \in \mathbb{B}_S.$$

Le théorème de changement de variables donne donc $v(\mathbb{B}_S) = |\det A|\,v(\mathbb{B})$ *i.e.* $v(\mathbb{B}_S) = \mu(S)v(\mathbb{B})$, il s'agit donc de minimiser μ sur l'ensemble des $S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ telles que $K \subset \mathbb{B}_S$.

Notons que si $S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$ et $\lambda > 0$ vérifient $\lambda\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_S$ alors $|||S||| \leq \lambda^{-2}$. En effet, si $\|X\| \leq 1$ alors $\lambda X \in \mathbb{B}_S$ donc $\langle \sqrt{S}X, \sqrt{S}X \rangle = \langle SX, X \rangle \leq \lambda^{-2}$ et il s'ensuit que $|||\sqrt{S}||| \leq \lambda^{-1}$ d'où $|||S||| \leq \lambda^{-2}$.

Puisque K est borné, il existe $r > 0$ tel que $K \subset r\mathbb{B}$ *i.e.* $K \subset \mathbb{B}_{S_0}$ où $S_0 = r^{-2}\mathrm{I}_n$. On considère alors l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{S \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})\ ;\ K \subset \mathbb{B}_S \ \text{ et } \mu(S) \geq \mu(S_0)\}$$

qui est un ensemble convexe (du fait de la convexité de μ), non vide (puisque $S_0 \in \mathcal{C}$) et fermé (le seul point non trivial est que la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ reste symétrique *définie* positive ce qui est assuré par la condition $\mu(S) \geq \mu(S_0)$ *i.e.* $\det S \geq \det S_0 > 0$). Comme 0 est un point intérieur de K, il existe $\lambda > 0$ tel que K contienne $\lambda\mathbb{B}$ et il résulte donc de la remarque ci-dessus que $|||S||| \leq \lambda^{-2}$ pour tout $S \in \mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est donc compact. La fonction μ est continue sur le compact $\mathcal{C}$ donc admet un minimum qui est atteint exactement une fois du fait de la stricte convexité de μ. □

Application. — Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.

Démonstration. — Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, on pose $K = \bigcup_{A \in G} A\mathbb{B}$. Alors K est compact (car image du compact $G \times \mathbb{B}$ par l'application continue $(A, X) \mapsto AX$) qui contient 0 dans son intérieur (puisque $\mathbb{B} \subset K$) donc K est contenu dans un unique ellipsoïde $\mathbb{B}_S$ de volume minimal.

Soit $B \in G$ alors (d'après la définition de K), on a $BK = K$ d'où $B^pK = K$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ or $\mathbb{B} \subset K \subset \mathbb{B}_{S_0}$ donc $\mathbb{B} \subset B^p\mathbb{B}_{S_0}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et il s'ensuit $1 = \mu(\mathrm{I}_n) \leq |\det B|^p\, \mu(S_0)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ donc $|\det B| = 1$. Si on pose $R = {}^tBSB$ alors $R \in \mathrm{Sym}^{++}(\mathrm{n})$, $K \subset \mathbb{B}_R$ et $\det R = \det S$ donc $R = S$ par unicité de l'ellipsoïde $\mathbb{B}_S$. □

Leçons concernées

22 Déterminants. Applications

25 Formes quadratiques. Applications

30 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications

Référence

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

Sébastien Pellerin

DÉVELOPPEMENT 12

ENVELOPPE CONVEXE DU GROUPE ORTHOGONAL

On considère l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\!|\ \|\!|_2$ induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Lemme. — *Les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les applications*

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, M \mapsto \mathrm{Tr}\ (AM) \quad \textit{où} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Démonstration. — On considère le morphisme $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})', A \mapsto f_A$ où $f_A(M) = \mathrm{Tr}\ (AM)$. Il s'agit de montrer que f est un isomorphisme *i.e.* (puisque $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})'$) de montrer que f est injective. Si $A = (a_{i,j})$ est telle que $f_A = 0$ alors, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$0 = f_A(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}\ (AE_{i,j})$$

mais

$$AE_{i,j} = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} \delta_{li} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,i} E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j}$$

d'où

$$0 = \mathrm{Tr}\ (AE_{i,j}) = \mathrm{Tr} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \mathrm{Tr}\ (E_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} \delta_{kj} = a_{j,i}$$

i.e. $A = 0$. □

Théorème. — *L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité.*

Démonstration. — Il est clair que $\mathbb{B}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ contient l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$, on considère donc une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|\!|M\|\!|_2 \leq 1$. D'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach, pour montrer que M est dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}(n)$, il suffit de montrer que

$$\varphi(M) \leq \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} \varphi(O)$$

pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'après le lemme, cela revient à montrer que

$$\mathrm{Tr}\ (AM) \leq \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} \mathrm{Tr}\ (AO)\ ,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On considère une décomposition polaire $A = \Omega S$ de A (*i.e.* Ω est orthogonale et S est symétrique positive) et une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S, alors

$$\sup_{O \in \mathcal{O}(n)} \mathrm{Tr}\ (AO) \geq \mathrm{Tr}\ (A\Omega^{-1}) = \mathrm{Tr}\ (\Omega^{-1}A) = \mathrm{Tr}\ (S) = \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\|_2 .$$

D'autre part, on a

$$\mathrm{Tr}\ (AM) = \mathrm{Tr}\ (MA) = \sum_{i=1}^{n} \langle MAe_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, M^* e_i \rangle$$

d'où d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathrm{Tr}\,(AM) \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 \, \|M^* e_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 \, \|\!|M^*|\!\|_2 \, \|e_i\|_2 .$$

Mais $\|\!|M|\!\|_2 \leq 1$ implique que $\|\!|M^*|\!\|_2 \leq 1$ et la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale donc

$$\mathrm{Tr}\,(AM) \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|\Omega S e_i\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \|S e_i\|_2$$

et on a finalement bien $\mathrm{Tr}\,(AM) \leq \sup_{O \in \mathcal{O}(n)} \mathrm{Tr}\,(AO)$. □

On rappelle qu'un élément U de $\mathbb{B}$ est dit *extremal* si toute écriture du type $U = \frac{1}{2}(V + W)$ avec $V, W \in \mathbb{B}$ implique $U = V = W$.

Théorème. — *$\mathcal{O}(n)$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité.*

Démonstration. — Notons tout d'abord que si $\|\!|U|\!\| < 1$ alors U n'est pas extrémal ; en effet, si $U = 0$ alors $U = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + (-\mathrm{I}))$ et si $U \neq 0$ alors $U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\|\!|U|\!\|}U + (2 - \frac{1}{\|\!|U|\!\|})U\right)$.

D'autre part, tout élément $U \in \mathcal{O}(n)$ est extrémal ; en effet, écrivons $U = \frac{1}{2}(V + W)$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $2Ux = Vx + Wx$ d'où

$$4\|x\|^2 = \|2Ux\|^2 = \|Vx\|^2 + \|Wx\|^2 + 2\langle Vx, Wx\rangle \leq \|\!|V|\!\|^2 \|x\|^2 + \|\!|W|\!\|^2 \|x\|^2 + \|\!|V|\!\|\|\!|W|\!\| \, \|x\|^2 \leq 4\|x\|^2$$

ce qui implique que les inégalités ci-dessus sont en fait des égalités *i.e.* on a

$$\|Vx\| = \|x\| \; ; \; \|Wx\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \langle Vx, Wx\rangle = \|Vx\| \, \|Wx\| \, ;$$

la dernière égalité implique que Vx et Wx sont positivement liés et le deux premières montrent donc qu'on a en fait $Vx = Wx$, d'où $U = V = W$.

Soit A un élément extrémal de la boule unité, on en considère une décomposition polaire $A = SO$, ce qui peut aussi s'écrire

$$A = {}^t\Omega D \Omega O \quad \text{où} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

et $\Omega, O \in \mathcal{O}(n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$. D'autre part on a $\|\!|A|\!\| = \|\!|D|\!\| = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i$ donc $0 \leq d_i \leq 1$ pour tout i. Supposons que l'un des d_i soit non nul, par exemple $d_1 \neq 0$, et posons

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 2d_1 - 1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

puis $V = {}^t\Omega D_1 \Omega O$ et $W = {}^t\Omega D_2 \Omega O$ alors $V \neq W$, $\|\!|V|\!\| = \|\!|D_1|\!\| \leq 1$, $\|\!|W|\!\| = \|\!|D_2|\!\| \leq 1$ et $A = \frac{1}{2}(U + W)$ ce qui contredit le caractère extrémal de A. Par conséquent, tous les d_i sont nuls *i.e.* $A = {}^t\Omega\Omega O = O \in \mathcal{O}(n)$. □