

Applications des nombres complexes à la géométrie.

182

I. GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

1) Liens entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} :

On représente le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2$ par \mathbb{C} via l'application:
 $(x, y) \mapsto x + iy$

Déf 1: l'affixe du point $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est $z_M = x + iy \in \mathbb{C}$

Prop 2: soient M_1 et $M_2 \in \mathbb{R}^2$ alors $\vec{z}_1, \vec{z}_2 = \langle \vec{OM}_1, \vec{OM}_2 \rangle + i \det(\vec{OM}_1, \vec{OM}_2)$

Prop 3: soient $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ alors: $\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle = \operatorname{Re}[(z_B - z_A)(z_D - z_C)]$

Si $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ alors $\operatorname{aire}(ABDC) = \operatorname{Im}[(z_B - z_A)(z_C - z_A)]$

Appli 4: $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ ssi $(z_B - z_A)(z_C - z_D) \in \mathbb{R}$.

$\vec{AB} \perp \vec{CD}$ ssi $(z_B - z_A)(z_C - z_D) \in i\mathbb{R}$.

Appli 5: Droite passant par A et B: $\{z \in \mathbb{C} / (z_B - z_A)(z - z_A) \in \mathbb{R}\}$
 Cercle de centre A de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$: $\{z \in \mathbb{C} / |z - z_A| = r\}$

Appli 6: Soit Δ un triangle de sommets A, B, C:

$$\operatorname{aire}(\Delta) = \frac{1}{4i} ((z_A + z_B)\bar{z}_C + (z_B - z_C)\bar{z}_A + (z_C - z_A)\bar{z}_B)$$

2) Angles:

Déf 7: La fonction exponentielle $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence infini.

Prop 8: (propriétés de l'exponentielle complexe)

- $\exp: (\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$.

- $\operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \cos \theta$ et $\operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \sin \theta$. On peut définir les fonctions sinus et cosinus de cette façon. Pour $\theta \in \mathbb{R}$.

- \exp est une fonction ouverte.

Prop 9: Soit $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ on a un nouveau morphisme de groupes: $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$
 $\theta \mapsto e^{i\theta}$

Prop 10: Étant donné deux vecteurs de S^1 , il existe une unique rotation envoyant l'un sur l'autre. On en déduit une relation d'équivalence sur $S^1 \times S^1$: $(\vec{u}_1, \vec{v}_1) R (\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ ssi la même rotation envoie \vec{u}_1 sur \vec{u}_2 et \vec{v}_1 sur \vec{v}_2 .

Déf 11: L'angle orienté de (\vec{u}, \vec{v}) est la classe de (\vec{u}, \vec{v}) dans $S^1 \times S^1 / R$

Prop 12: On a la suite de surjections suivante:

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathcal{U}, \cdot) \rightarrow (O + (2\pi)\mathbb{Z}) \rightarrow S^1 \times S^1 / R$$

$$\theta \mapsto e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mapsto (\vec{1}, e^{i\theta})$$

Appli 13: • Coordonnées polaires: $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$, $z = re^{i\theta}$
 θ est alors appelé argument de z .

• Nouvelle caractérisation du cercle de centre A et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$:
 $\{z \in \mathbb{C} / z - z_A = re^{i\theta}\}$

• Triangle équilatéral: un triangle de sommets A(a), B(b), C(c) est équilatéral ssi $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

• Les racines n-ième de l'unité sont les sommets d'un n-gone régulier

• Théorème de l'angle au centre: Si A, B et C sont trois points distincts d'un cercle de centre O alors on a l'égalité d'angles orientés de vecteurs:
 $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{CA}, \vec{CB})$

3) Transformations du plan:

Déf 14: Les similitudes directes sont les applications de la forme $z \mapsto az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Le rapport de la similitude est $|a|$ son angle est un argument de a .

Prop 15: l'ensemble des similitudes directes forment un groupe engendré par les rotations, les homothéties et les translations:

$$\operatorname{Sim}(\oplus) = \langle z \mapsto e^{i\theta}z, z \mapsto \lambda z, z \mapsto z + b \rangle \quad \theta \in]0, 2\pi[, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{C}$$

Propriétés 16: les similitudes directes conservent les angles orientés et les rapports de distances.

les similitudes directes envoient une droite \mathcal{D} sur une droite \mathcal{D}' telle que l'angle $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ soit celui de la similitude $[\pi]$.

[AND III.1]

p. 63, 77

[TRI p. 44]

[AND III.18]

p. 91

[EUD II.3.4]

[RUD]

Une similitude direct de rapport k envoie un cercle de rayon R sur un cercle de rayon kR dont le centre est l'image du centre.

Def 17: On définit la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ comme la réflexion par rapport à l'axe des IR .

On appelle similitudes indirectes les applications: $z \mapsto a\bar{z} + b$, $a \neq 0$.

Def 18: $f: D \rightarrow C$ est appelée isométrie affine si

$$\forall z_1, z_2 \in D, |f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|$$

Prop 19: l'ensemble des isométries du plan forment un groupe, engendré par la conjugaison complexe, les rotations et les translations.

$$I_{\text{sim}} = \langle z \mapsto z, z \mapsto e^{i\theta} z, z \mapsto z + b \rangle \subset \text{Euc}(\mathbb{C})$$

4) Polynômes et barycentres

Def 20: le barycentre d'un système de points pondérés $((A_i, \alpha_i))_{i \in I}$ (A.R.P.) tel que $\sum \alpha_i \neq 0$ est l'unique point G tel que $\sum \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$.

Thm 1: (GAUSSLUAS) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P .

Thm 2: (Ellipse de Steiner). Soient $A(a), B(b), C(c)$ trois points distincts du plan affine. Si on note $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ et w_1, w_2 les racines de P' , Alors l'ellipse de foyers $F_1(w_1)$ et $F_2(w_2)$ tangente à un côté du triangle ABC est tangente à tous les côtés de leur milieu.

II. GÉOMÉTRIE PROTECTIVE COMPLEXE [DEV]

1) Droite projective complexe.

Def 23: l'espace projectif de C^2 note $\mathbb{P}C^2$ et $e^{i\pi/2}$, ou $\mathbb{R}P^2$ est l'espace projectif de R^2 note $\mathbb{R}P^2$ et $e^{i\pi}$. On note $p: C^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}C^2$ la projection d'un élément non nul sur $\mathbb{P}C^2$.

[AUD 169]

Prop 24: $\mathbb{P}C^2$ est l'ensemble des droites vectorielles de C^2 . On note également $\mathbb{P}C^2 = \mathbb{P}_1(C)$.

Def 25: Soit S^2 la sphère euclidienne de \mathbb{R}^3 , $N(0,0,1)$ le pôle NORD de S^2 . On identifie D à $f(x,y,0) / (x,y) \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \subset \mathbb{R}^3$.

On définit la projection stéréographique:

$$\pi: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow D, \quad p \mapsto (pN) \cap D$$

π est continue et on peut le prolonger en N en posant $\pi(N) = \infty$. On a finalement que $S^2 \cong D \cup \{\infty\}$, c'est la sphère de Riemann.

Prop 26: $\mathbb{P}_1(C) \cong S^2$ et on a les bijections suivantes:

$$\mathbb{P}_1(C) \xrightarrow{\pi} S^2 \xrightarrow{\pi^{-1}} \mathbb{P}_1(C)$$

$$\{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_1(C) \xrightarrow{\pi^{-1}} \{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$$

$$\{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_1(C) \xrightarrow{\pi^{-1}} \{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$$

App 27: $\mathbb{P}_1(C)$ est compact.

Def 28: Un repère projectif de $\mathbb{P}_1(C)$ et un système de 3 points (P_1, P_2, P_3) tel qu'il existe une base (e_1, e_2) de C^2 et $\forall i \in \{1, 2, 3\}, P_i = p(e_i)$, $P_3 = p(e_1 + e_2)$.

Ex 29: Pour $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ une base de C^2 on obtient un repère projectif de $\mathbb{P}_1(C)$ constitué de trois points: $(p(\frac{1}{2}), p(\frac{1}{2}), p(\frac{1}{2}))$.

2) Homographies

Def 30: Une homographie $g: \mathbb{P}_1(C) \rightarrow \mathbb{P}_1(C)$ est une application telle que il existe un nombre complexe λ tel que $g \circ p = p \circ f$ avec $f: C^2 \setminus \{0\} \rightarrow C^2 \setminus \{0\}$ tel que le diagramme suivant commut:

$$\begin{array}{ccc} C^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & C^2 \setminus \{0\} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{P}_1(C) & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}_1(C) \end{array}$$

[AUD p527]

[FGN 5437] [AUD p30]

[AUD 111]

[AUD p10]

[AUD VI.5.14]

[Chap. d'OMF]

Prop 31: $g: \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ une homographie s'écrit:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \text{ avec } ad-bc \neq 0 \\ \infty & \text{si } z = -d/c \\ a/c & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Prop 32: L'ensemble des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est noté $\text{PGL}(\mathbb{C}^2)$ ou $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$, et c'est un groupe isomorphe à $\text{GL}(\mathbb{C}^2) / \{\text{homographies}\}$.

Prop 33: Soient (P_1, P_2, P_3) et (P'_1, P'_2, P'_3) deux repères projectifs de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Alors il existe une unique homographie h de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \{1, 2, 3\}, h(P_i) = P'_i$.

Prop 34: Le groupe $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et l'inversion complexe.
 $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) = \langle z \mapsto \frac{1}{z}, z \mapsto az + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \rangle$

3) Birapport

Thm 35: $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ 3 transitivement et simplement.
i.e: $\exists!$ homographie qui envoie trois points distincts sur trois points distincts.

Def 36: Pour a, b et $c \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ distincts, et $d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ on peut définir le birapport $[a, b, c, d]$ comme $h(d)$ où h est l'unique homographie telle que:
 $h(a) = \infty, h(b) = 0, h(c) = 1$.

Remarque 37:

On a aussi l'expression $[a, b, c, d] = \frac{d-b}{d-a} \cdot \frac{c-a}{c-b}$

Exemple 38: $[1, i, -1, -1] = 2$

[AUD p. 193]

[AUD p. 201]

[AUD p. 197, p. 196]

Thm 39: Soit f une bijection de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
 $(f \text{ est une homographie}) \Leftrightarrow (f \text{ conserve les birapports})$

Prop 40:
(Quatre points sont cocycliques ou alignés) \Leftrightarrow (leur birapport est réel)

Corollaire 41: Les homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ transforment un cercle de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ en un cercle de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Appl. 42: (Théorème de Ptolémée)
Un quadrilatère convexe est inscriptible ssi le produit des longueurs des diagonales est la somme des produits des longueurs des côtés opposés: $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$

4) Groupe circulaire

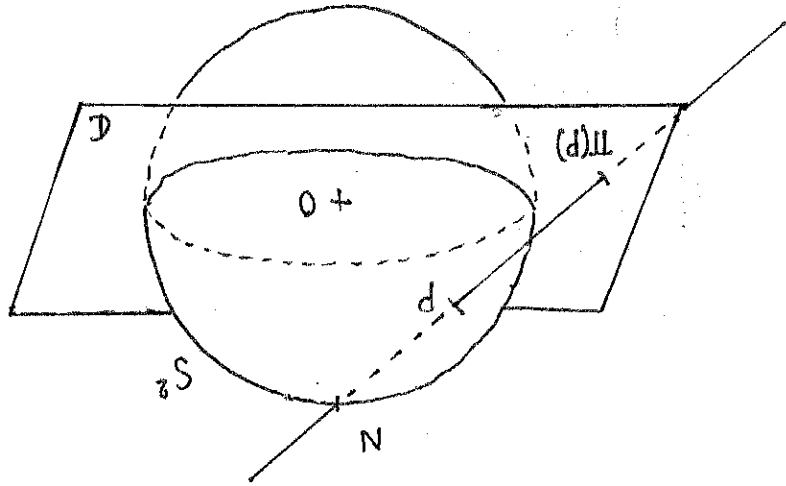
Def 43: On appelle groupe circulaire le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe.

Thm 44: Le groupe circulaire est exactement l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui laissent stable l'ensemble des cercles de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. [DEV]

[AUD p. 202]

[AUD p. 205, 204]

Annexe : Projection stéréographique



References :

- [AVD] M. Audin, Géométrie
- [EID] J.-D. Eiden, Géométrie analytique classique
- [FR] J. Frigman, La géométrie des nombres complexes.
- [FN] François Giannelis Nicolas algèbre 1.

Le groupe circulaire

Florian BOUGUET

Référence : M. Audin, *Géométrie*

On voit ici la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme le plan complexe muni d'un point à l'infini, que l'on notera ∞ pour être un peu original.

Théorème 1

Notons G le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe. G est exactement l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même préservant l'ensemble des cercles ou droites (c 'est-à-dire envoyant un cercle ou une droite sur un cercle ou une droite).

Preuve du théorème :

On va procéder par double inclusion, et un sens est trivial. En effet, on sait que les homographies sont des bijections de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même. D'autre part, puisqu'elles préservent le birapport (et puisque le birapport de quatre points est réel si, et seulement si, ils sont alignés ou cocycliques) elles préservent l'ensemble des cercles ou droites. Enfin, la conjugaison complexe est une symétrie toute bête par rapport à \mathbb{R} , et envoie donc un cercle sur un cercle et une droite sur une droite.

Considérons φ une bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur lui-même préservant l'ensemble des cercles ou droites. Rappelons qu'à tout couple de triplets de points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ correspond une homographie envoyant le premier sur le second. Donc, quitte à composer φ par une homographie (ce qui ne modifie l'appartenance ou la non-appartenance à G), on peut supposer que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(\infty) = \infty$. Cette troisième condition sur φ implique immédiatement que φ conserve les cercles ou les droites, mais séparément cette fois-ci !

φ préserve les divisions harmoniques

On va montrer que φ conserve les divisions harmoniques. Rappelons que a, b, c et d sont en division harmonique si $[a, b, c, d] = -1$. Un cas particulier très utile par la suite est que

$$[a, b, c, \infty] = -1 \Leftrightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

Cette partie du développement fait appel au lemme suivant :

Lemme 1

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. La construction de l'unique point $d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tel que a, b, c et d soient en division harmonique se fait uniquement en matière d'intersection et de tangence de droites et de cercles.

Une fois ce lemme prouvé, la conclusion est quasiment immédiate. En effet, φ préserve la tangence et l'intersection par injectivité, et préserve les cercles ou les droites. Donc φ préservera

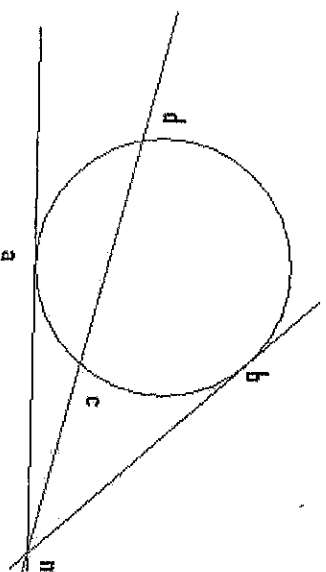
la situation des points a, b, c et d et donc le fait qu'ils soient en division harmonique.

Preuve du lemme :

On se donne donc trois points $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Deux cas se posent : les points sont alignés ou cocycliques. Nous donnerons à chaque fois la méthode de construction du point d , que nous justifierons ensuite.

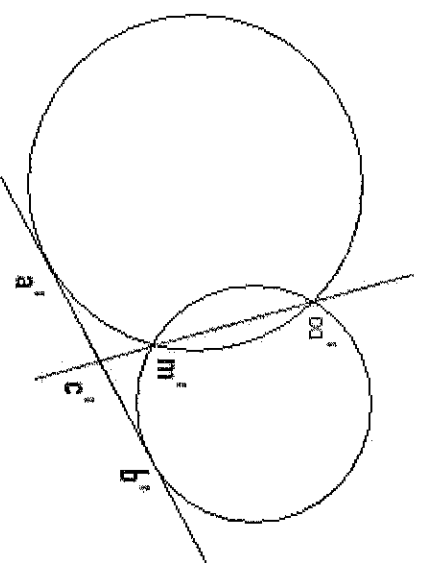
Cas des points cocycliques

Construction :



Considérons le point m issu des tangentes à a et b (qui peut éventuellement être égal à ∞ si les tangentes sont parallèles). La seconde intersection de la droite (mc) avec le cercle est d .

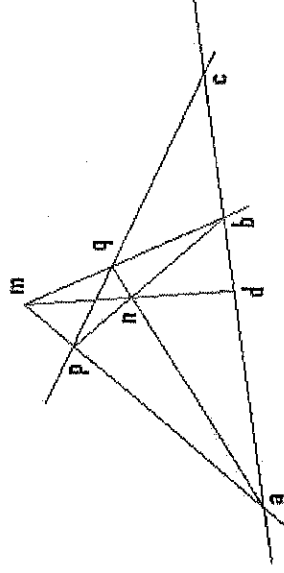
Justification : On envoie d à l'infini par une homographie



La droite rouge devient l'axe radical des deux cercles, et coupe donc $[ab]$ en son milieu, c . Donc $[a, b, c, d] = -1$, et on peut conclure par conservation du birapport par les homographies (si comme 99% des étudiants de M2 vous n'avez jamais entendu parler d'axe radical ou de puissance par rapport à un cercle, allez jeter un oeil aux remarques). Si $m = \infty$, alors la droite rouge devient la tangente commune aux deux cercles, et est encore leur axe radical.

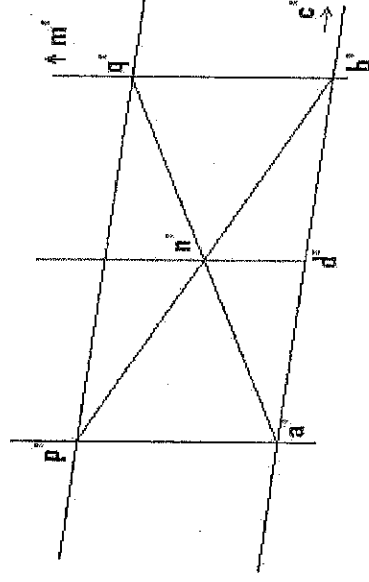
Cas des points alignés

Construction :



On choisit un point m en dehors de la droite (ab) , et on trace une droite issue de c coupant $[am]$ et $[bm]$. On peut alors tracer la droite (mn) , où n est le centre du quadrilatère qu'on vient d'obtenir. (mn) coupe (ab) en d .

Justification 1 : On envoie (mc) à l'infini par une homographie



Cette justification, bien que plus intuitive et plus rapide, utilise malheureusement des notions de plan projectif et d'homographies en dimension supérieure, qui ne sont plus au programme (du moins en 2012) et risque donc de vous entraîner sur un terrain glissant. En effet, la justification se fait dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. .. Bref, n' devient le centre d'un parallélogramme, et la droite rouge coupe donc $[a'b']$ en son milieu. On a alors que $[a', b', c', d'] = [a', b', d', c']^{-1} = [a', b', d', \infty]^{-1} = -1$, et on peut alors conclure à nouveau par conservation du birapport.

Justification 2 :

On se place en coordonnées barycentriques dans le système (a, b, m) . Rappelons que toutes les coordonnées sont définies à constante multiplicative non-nulle près. Si $n = (\alpha, \beta, \mu)$, où α, β, μ sont tous non-nuls, alors on a immédiatement $p = (\alpha, 0, \mu), q = (0, \beta, \mu), d = (\alpha, \beta, 0)$ car ils appartiennent chacun à un côté du triangle.

p, q et c sont alignés, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $c = p + \lambda q = (\alpha, \lambda\beta, (1 + \lambda)\mu)$. Puisque a, b et c sont aussi alignés, $(1 + \lambda)\mu = 0$ donc $c = (\alpha, -\beta, 0)$.

Donc

$$\frac{d-b}{d-a} = \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{c-b}{c-a}$$

Donc $[a, b, c, d] = -1$.

φ est un automorphisme de corps

Grâce à la conservation des divisions harmoniques, on va montrer que $\varphi|_{\mathbb{C}}$ est un automorphisme de corps. Considérons $a, b \in \mathbb{C}$. φ conserve les divisions harmoniques donc les milieux.

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \\ &= \varphi\left(\frac{(a+b) + 0}{2}\right) = \frac{\varphi(a+b) + \varphi(0)}{2} = \frac{\varphi(a+b)}{2} \end{aligned}$$

Donc $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. On en déduit que

$$\varphi(a-a) = \varphi(a) + \varphi(-a) = \varphi(0) = 0$$

Donc $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.

$\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, remarquons que

$$[a, -a, a^2, 1] = \frac{1+a}{1-a} = \frac{1+a}{\frac{1+a}{a^2+a}} = \frac{1+a}{-\frac{1+a}{1-a}} = -1$$

Les points $a, -a, a^2$ et 1 étant en division harmonique, on a

$$\begin{aligned} [a, -a, a^2, 1] &= [\varphi(a), \varphi(-a), \varphi(a^2), \varphi(1)] = [\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a^2), 1] \\ &= [\varphi(a), -\varphi(a), 1, \varphi(a^2)] = -1 \end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour tout complexe différent de 0 et 1, elle reste vraie pour $\varphi(a)$ si $a \neq 0$ ou 1. Donc

$$\begin{aligned} [\varphi(a), -\varphi(a), \varphi(a)^2, 1] &= [\varphi(a), -\varphi(a), 1, \varphi(a)^2] = -1 \\ &= [\varphi(a), -\varphi(a), 1, \varphi(a^2)] \end{aligned}$$

Par unicité du birapport, on conclut que $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$ (ce résultat reste vrai si $a = 0$ ou 1)

Pour finir, remarquons que $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Donc

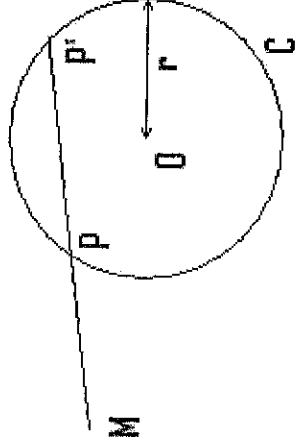
$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= \varphi\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) \\ &= \varphi\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) - \varphi\left(\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) \\ &= \left(\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 - \left(\varphi\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)^2 \\ &= \left(\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varphi(a) - \varphi(b)}{2}\right)^2 \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

$\varphi|_{\mathbb{C}}$ est donc un automorphisme de corps.

Puisque $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\varphi_{\mathbb{R}}$ est l'identité. $\varphi(i)^2 = -1$ et $\varphi(a + ib) = a + \varphi(i)b$. Donc $\varphi(i) = \pm 1$.
 Donc $\varphi|_{\mathbb{C}} = Id$ ou $z \mapsto \bar{z}$. Donc $\varphi \in G$, CQFD.

REMARQUE

Dans la démonstration du cas cocyclique du lemme, il faut montrer que c' , point d'intersection de la droite rouge et de $(a'b')$, est milieu de $[a'b']$. Il ne s'agit pas d'un fait trivial, et la façon la plus élégante (et élémentaire) de le démontrer consiste à introduire la notion de puissance par rapport à un cercle.



On appelle puissance de M par rapport au cercle C la quantité

$$\rho_C(M) = OM^2 - r^2$$

Il est évident que C est exactement l'ensemble des points de puissance nulle par rapport à lui-même. De plus, un petit calcul vectoriel donne aussi que

$$\rho_C(M) = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP'}$$

Enfin, on appelle axe radical des cercles C et C' la droite de points ayant même puissance par rapport à chacun des cercles.

Après avoir introduit tout ceci, ramenons-nous au cas qui nous intéresse. La droite rouge est l'axe radical des deux cercles (en effet, elle passe par leurs points d'intersections, qui appartiennent évidemment à l'axe radical). c' appartient donc à l'axe radical, et on en déduit que

$$(a' - c')(a' - c') = (b' - c')(b' - c')$$

Donc c' est bien le milieu de $[a'b']$.



L'ellipse de Steiner

Florian BOUGUET

Theorème 1

Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts non-alignés du plan affine. Si on note $P = (X - a)(X - b)(X - c)$ et ω_1 et ω_2 les racines de P' , alors l'ellipse de foyers $F_1(\omega_1)$ et $F_2(\omega_2)$ tangente en un côté du triangle ABC est tangente à tous les côtés en leur milieu.

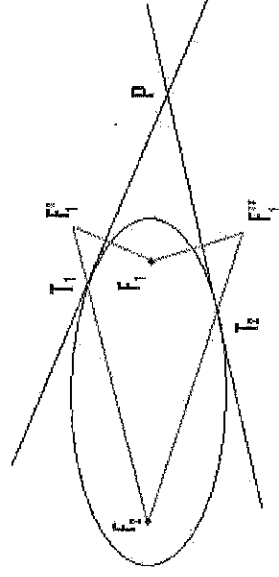
Avant de démontrer le théorème proprement dit, nous allons introduire le lemme suivant :

Lemme 1 (de Poncelet)

Considérons une ellipse de foyers F_1, F_2 et un point P extérieur à l'ellipse. Si on note T_1 et T_2 les points de tangences issus de P , alors on a

$$(PT_1, PF_1) = (PF_2, PT_2)$$

Démonstration du lemme :



Notons σ_{PF_2} et σ_{PT_2} les symétries axiales respectives par rapport à (PF_2) et (PT_2) . Montrer que $(PT_1, PF_1) = (PF_2, PT_2)$ revient à montrer que $\rho_1 = \sigma_{PF_1} \circ \sigma_{PT_1} = \sigma_{PT_2} \circ \sigma_{PF_2} = \rho_2$. En effet, ρ_1 et ρ_2 sont des rotations de centre P ...

(PT_1) est tangente à l'ellipse en T_1 , et donc, par définition, il s'agit de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{T_1 T_1 F_2}$. Donc, si on note $F_1' = \sigma_{PT_1}(F_1)$, les points F_2, T_1 et F_1' sont alignés dans cet ordre. De même, en notant $F_1'' = \sigma_{PT_2}(F_1)$, les points F_2, T_2 et F_1'' sont alignés dans cet ordre. L'idée est de calculer l'image de F_1' par ρ_1 et ρ_2 est la même, à savoir F_1 .

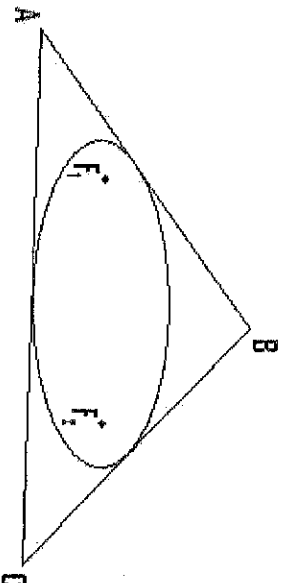
- $\sigma_{PT_1}(F_1') = F_1$ par définition de $F_1', \sigma_{PF_1}(F_1) = F_1$ de manière plutôt évidente, et donc $\rho_1(F_1') = F_1$

- $d(F_2, F_1') = d(F_2, T_1) + d(T_1, F_1') = d(F_2, T_1) + d(T_1, F_1) = 2a$. De même, $d(F_2, F_1'') = 2a$. On a donc $d(F_2, F_1') = d(F_2, F_1'')$. De plus, $d(P, F_1') = d(P, F_1) = d(P, F_1'')$. Donc (PF_2) est la médiatrice de $[F_1' F_1'']$, et donc $\sigma_{PF_2}(F_1') = F_1''$. Enfin, par définition de $F_1', \sigma_{PT_2}(F_1') = F_1$. Donc $\rho_2(F_1') = F_1$.

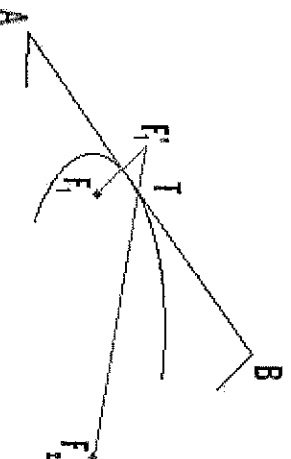
Donc $\rho_1 = \rho_2$.

□

Démonstration du théorème :



Rappelons que les points A, B, C, F_1 et F_2 ont pour affixes respectives a, b, c, ω_1 et ω_2 , et qu'on a noté $P = (X - a)(X - b)(X - c)$. On peut construire l'ellipse \mathcal{E} de foyers F_1 et F_2 tangente au côté $[AB]$. Pour ce faire, on trace F_1' , symétrique de F_1 par rapport à $[AB]$ puis T' , intersection de (AB) et $(F_2 F_1')$. On a alors un point de l'ellipse, nécessaire et suffisant pour construire \mathcal{E} . Cette construction est justifiée par le théorème de Gauss-Lucas, qui affirme que les points F_1 et F_2 sont contenus dans l'enveloppe convexe du triangle ABC , c'est-à-dire le triangle ABC .



On doit maintenant montrer que \mathcal{E} est tangente à tous les côtés en leurs milieux. Toute la démonstration repose sur le fait que P' peut s'écrire de deux façons, à savoir :

$$\begin{aligned} P' &= (X - a)(X - b) + (X - a)(X - c) + (X - b)(X - c) \\ &= 3(X - \omega_1)(X - \omega_2) \end{aligned}$$

On va montrer que $[AC]$ est tangente à \mathcal{E} . Evaluons donc P' en a :

$$\begin{aligned} P'(a) &= (a - a)(a - b) + (a - a)(a - c) + (a - b)(a - c) = (a - b)(a - c) \\ &= 3(a - \omega_1)(a - \omega_2) \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{a - b}{a - \omega_1} = 3 \frac{a - \omega_2}{a - c}$$

D'où, par passage aux arguments, $(AB, AF_1) = (AF_2, AC)$. (AC) est donc tangente à \mathcal{E} par le lemme de Poncelet.

En calculant $P'(b)$, on montre exactement de la même manière que (BC) est tangente à \mathcal{E} . On va maintenant montrer que la tangence s'effectue en les milieux des côtés. Notons I le milieu de $[AB]$, d'affixe $\frac{a+b}{2}$. Évaluons P' en ce nombre :

$$\begin{aligned} P'(\frac{a+b}{2}) &= (\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b) + (\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - c) + (\frac{a+b}{2} - b)(\frac{a+b}{2} - c) \\ &= 3(\frac{a+b}{2} - \omega_1)(\frac{a+b}{2} - \omega_2) \end{aligned}$$

Puisque $\frac{a+b}{2} - a = -(\frac{a+b}{2} - b)$, on a

$$(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b) = 3(\frac{a+b}{2} - \omega_1)(\frac{a+b}{2} - \omega_2)$$

A nouveau, par passage aux arguments on obtient que $(\vec{IA}, \vec{IF}_1) = (\vec{IF}_2, \vec{IB})$. I est donc le point de tangence de \mathcal{E} et (AB) .

Encore de la même manière, en évaluant P' en les milieux de $[AC]$ et $[BC]$, on obtient la tangence en leurs milieux respectifs.

REMARQUE

□

On pourra s'interroger sur deux points importants de ce développement. Tout d'abord, le fait que F_2, T_1 et F'_1 soient alignés (seconde partie de la démonstration du lemme de Poncelet) n'est pas tout à fait trivial. Il s'agit d'une conséquence du fait que la tangente est la bissectrice extérieure de $\widehat{F_1 T_1 F_2}$ (l'écrire une fois permet de s'en convaincre).

De plus, le fait que I vérifie $(\vec{IA}, \vec{IF}_1) = (\vec{IF}_2, \vec{IB})$ (fin de la démonstration du théorème) n'implique pas tout de suite que I soit le point de tangence. Cependant, en notant T ce fameux point de tangence sur (AB) , on peut conclure rapidement par l'absurde que T et I sont confondus.

Enfin, une des propriétés les plus intéressantes de l'ellipse de Steiner est qu'il s'agit de l'ellipse de volume maximal inscrite dans son triangle. C'est loin d'être une propriété triviale à montrer, et il peut être bon d'avoir une idée de sa démonstration (qui fait appel à des calculs en coordonnées barycentriques). On peut en trouver une preuve dans *Mathematical Plums* de R. Honsberger (dans la partie de G.D. Chakerian appelée *A Distorted View of Geometry*).

