Utilisation des groupes en géométrie.

183

Dans les parties I et II, E est toujours un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

I/ Géométrie affine

1) Le groupe affine

[Con 105-119]

Déf 1 : On appelle espace affine un ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel le groupe $(E,+)$ agit à droite, transitivement et librement. On note $M, N, \dots$ les points, qui sont des éléments de $\mathcal{E}$, et $\vec{x}, \vec{y}, \dots$ les vecteurs, qui sont des éléments de E.

Prop 2 : Les translations $t_{\vec{x}} : M \mapsto M+\vec{x}$ forment un sous-groupe du groupe $S_{\mathcal{E}}$ des bijections de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$, isomorphe à E.

Déf 3 : Soient E et E' deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines sur E et E' resp. $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est une application affine s'il existe $v_f : E \to E'$ linéaire telle que $\forall M \in \mathcal{E}, \forall \vec{x} \in E, f(M+\vec{x}) = f(M) + v_f(\vec{x})$, soit $\forall \vec{x} \in E, f \circ t_{\vec{x}} = t_{v_f(\vec{x})} \circ f$.

Déf et prop 4 : Les automorphismes de $\mathcal{E}$ forment un groupe pour la composition, noté $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ et nommé groupe affine de $\mathcal{E}$.

Prop 5 : $v : \mathrm{Aut}(\mathcal{E}) \to GL(E)$, $f \mapsto v_f$ est un morphisme surjectif de groupes, de noyau l'ensemble T des translations de $\mathcal{E}$, sous-groupe commutatif distingué de $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$.

2) Sous-groupe des homothéties

Déf et prop 6 : Pour tout $A \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $h : M \mapsto A + \lambda \vec{AM}$ est une application affine, nommée homothétie de centre A et de rapport λ, qui vérifie $v_h = \lambda \, \mathrm{Id}_E$.

[Con 111-112] [AUD]

Prop 7 : Soit $H = \{ f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E}) \,/\, \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, v_f = \lambda \, \mathrm{Id}_E \}$. H est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$; en outre, T est un sous-groupe distingué de H, et pour tout $A \in \mathcal{E}$, le groupe H_A des homothéties de centre A est un sous-groupe de H.

Appli 8 : théorème de Pappus (cf figure 1)

3) Orientation d'un espace affine

[Con 107-112]

Déf 9 : Un système $(O, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$, formé d'un point O de $\mathcal{E}$ et d'une base $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ de E, est appelé repère cartésien de $\mathcal{E}$.

Prop 10 : Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ préserve un repère de $\mathcal{E}$ si et seulement si elle est égale à l'application identité.

Thm 11 : $\mathcal{E}$ est isomorphe à l'espace affine canonique $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ défini par $\mathcal{E} = E$ et l'action par translation.

Déf 12 : Deux repères cartésiens R et R' sont de même orientation si et seulement si l'unique isomorphisme affine f de $\mathcal{E}$ qui envoie R sur R' vérifie $\det(v_f) > 0$.

Thm 13 : Pour une orientation de $\mathcal{E}$ déterminée par le choix d'un repère R, l'ensemble $(\mathrm{Aut}(\mathcal{E}))^+$ des automorphismes affines directs de $\mathcal{E}$, qui est l'ensemble des éléments f de $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ tels que R et $f(R)$ ont même orientation, est un sous-groupe distingué d'indice 2 de $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$.

II/ Géométrie euclidienne

1) Espace euclidien et groupe des isométries

Déf 14 : On appelle espace euclidien de dimension n un espace affine $\mathcal{E}$ sur un espace vectoriel euclidien E de dimension n.

[Con 153-154]

Déf 15: On appelle endomorphisme orthogonal de E un endomorphisme $v \in GL(E)$ qui vérifie : $\forall \vec{x} \in E$, $\|v(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$.

Thm 16: L'ensemble $O(E)$ des endomorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé groupe orthogonal de E.

Thm 17: $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales, et tout élément de $O(E)$ est produit d'au plus n réflexions.

Ex 18: Une translation est produit de deux réflexions.

[PER 225-143]

Déf 19: On appelle renversement de E une symétrie de E dont le sous-espace propre E_{-1} est de dimension 2.

Ex 20: Les renversements de $\mathbb{R}^3$ sont les rotations axiales.

Thm 21: En dimension 3, $SO(E)$ est engendré par les renversements.

[Con 156]

Thm 22: Soient E et E' deux espaces euclidiens de même dimension, $(A, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ un repère orthonormé de E, $f : E \to E'$ une application affine. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est isométrique (ii) v_f est orthogonale
(iii) $(f(A), v_f(\vec{e_1}), \dots, v_f(\vec{e_n}))$ est un repère orthonormé de E'

Co 23: E est isomorphe à l'espace euclidien canonique $E_n(\mathbb{R})$, où $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique.

2) Les groupes diédraux

[Con 165]

Déf 24: Soit P_n un polygone régulier convexe à n sommets dans $E_2(\mathbb{R})$. On nomme groupe diédral d'ordre n et on note D_n le groupe des isométries de $E_2(\mathbb{R})$ qui laissent P_n invariant.

[ELLI]

Prop 25: $D_n = \langle r, s \rangle$ où r est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s la symétrie par rapport à la droite passant par un sommet de P_n et
- le sommet opposé si n est pair
- le milieu du côté opposé si n est impair

(cf figure 2). On a $r^n = s^2 = (sr)^2 = 1$.

Rmq 26: En particulier, $D_3 \simeq \mathfrak{S}_3$.

3) Isométries des solides de Platon

[H2G2 362-364]

Thm 27: Soit T tétraèdre régulier dans $E_3(\mathbb{R})$, $Is(T)$ le groupe des isométries qui préservent T, $Is^+(T)$ le groupe des isométries positives qui préservent T. On a :

$\boxed{Is(T) \simeq \mathfrak{S}_4 \quad ; \quad Is^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4}$

Pour K cube dans $E_3(\mathbb{R})$, avec les mêmes notations :

$\boxed{Is(K) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad ; \quad Is^+(K) = \mathfrak{S}_4}$

DÉV 1

[Con 171]

Prop 28: Tout sous-groupe fini d'ordre $n \geq 2$ du groupe des déplacements de $E_3(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{U}_n$, à $D_{n/2}$ (n étant alors pair), ou à $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{A}_5$.

4) Quaternions et géométrie

[PER 161-164]

Déf 29: On note $\mathbb{H}$ la $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4, nommée algèbre des quaternions, munie d'une base $1, i, j, k$ telle que :
(i) 1 est neutre pour la multiplication ;
(ii) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$.

Déf 30: Soit $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$. On définit le conjugué $\bar{q}$ de q par : $\bar{q} = a - bi - cj - dk$, et la norme $N(q)$ de q par
$N(q) = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Prop 31: $\forall q \in \mathbb{H}$, $N(q) \in \mathbb{R}^+$.

Prop 32 : N est une forme quadratique euclidienne sur $\mathbb{H}$. La base $(1, i, j, k)$ est orthonormée relativement à N, et la conjugaison est une symétrie orthogonale d'espaces propres $\mathbb{R}$ et $P = \{bi+cj+dk \,/\, (b,c,d) \in \mathbb{R}^3\}$.

Th 33 : $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif de centre $\mathbb{R}$, et $N : \mathbb{H}^* \to \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme de groupes surjectif de noyau G, le groupe des quaternions de norme 1.

Rmq 34 : $G \simeq \mathbb{S}^3$; en particulier, G est connexe.

Thm 35 : On a un isomorphisme de groupes

$$\boxed{\overline{S} : G/\{-1;1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})}$$ **DÉV 2**

Rmq 36 : les quaternions fournissent donc un outil algébrique pour représenter les rotations dans l'espace (utilisé en simulation 3D).

[H2G2]

II/ Droites projectives

1) Espaces projectifs et homographies

On considère ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E et E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Déf 37 : On nomme espace projectif déduit de E et on note $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E, soit $E \setminus \{0\}$ quotienté par la relation de colinéarité. Par définition, $\dim(\mathbb{P}(E)) = \dim(E) - 1$. En particulier, on note $\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$ la droite projective sur $\mathbb{K}$.

Rmq 38 : On peut considérer $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ comme une droite affine de $\mathbb{K}^2$ complétée par un point à l'infini (cf figure 3).

Déf 39 : Soient $p : E \setminus \{0\}$ et $p' : E' \setminus \{0\}$ les deux projections. On appelle homographie une application $g : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ telle qu'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to E'$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \setminus \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E' \setminus \{0\} \arrow[d, "p'"] \\ \mathbb{P}(E) \arrow[r, "g"] & \mathbb{P}(E') \end{tikzcd}$$

Prop et déf 40 : L'ensemble des homographies de $\mathbb{P}(E)$ forment le groupe projectif $GP(E)$ de E.

Cor 41 : $GP(E) \simeq GL(E)/H$.

Appli 42 : théorème de Pappus généralisé (cf figure 4).

2) Droite projective complexe et birapport

Prop 43 : Toute homographie de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ s'écrit $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad-bc \neq 0$, et avec les conventions habituelles $1/\infty = 0$; $1/0 = \infty$.

Déf 44 : L'image de $d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par l'unique homographie $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui envoie a sur ∞, b sur 0 et $c \mapsto 1$ est nommée birapport de (a,b,c,d) et notée $[a,b,c,d]$.

Prop 45 : Soient a, b, c, d quatre points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dont les trois premiers sont distincts, alors :

$$[a,b,c,d] = \frac{d-b}{d-a} \Big/ \frac{c-b}{c-a}$$

Prop 46 : Le groupe $GP(\mathbb{C}^2)$ est engendré par les similitudes directes $z \mapsto az+b$ $(a \neq 0)$ et $z \mapsto 1/z$.

Prop 47 : Quatre points de $\mathbb{C}$ sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est réel.

Cor 48 : Toute homographie de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ transforme un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$ en un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$.

Thm 49 : Soit $a, b, c, d, a', b', c', d'$ huit points distincts de $\mathbb{C}$, alors

$$[a,b,c',d'][b,c,a',d'][c,a,b',d'][a',b',c,d][b',c',a,d][c',a',b,d] = 1$$

Appli 50 : Pivot d'un triangle (cf figure 5).

CAUD 177-2023

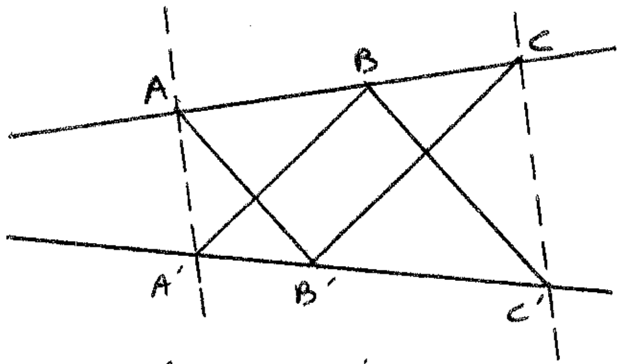


Figure 1 : théorème de Pappus.

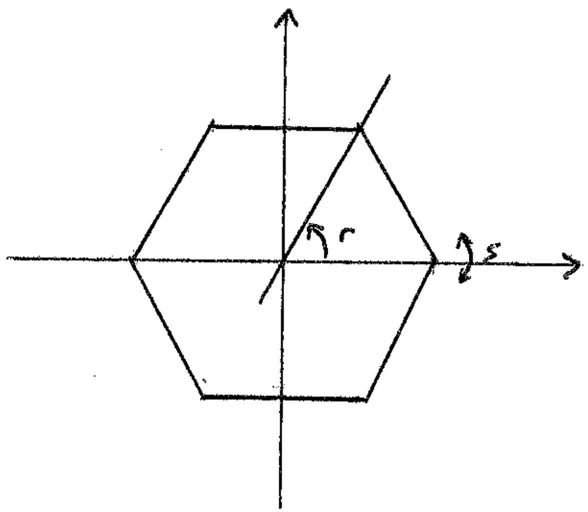


Figure 2 : générateurs de D_6.

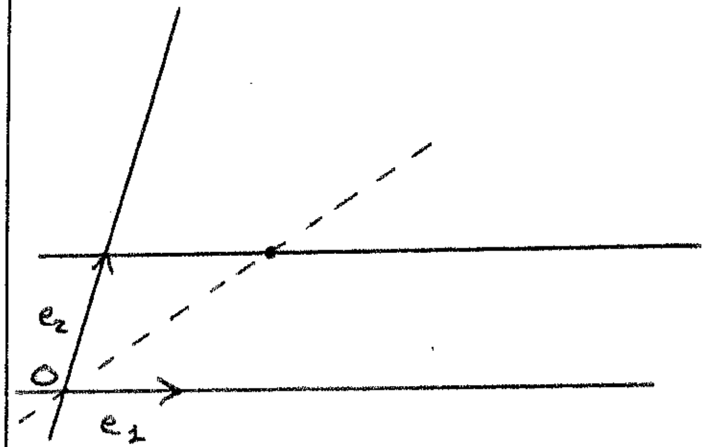


Figure 3 : $P_1(\mathbb{K})$ considéré comme la droite $y = 1$, complétée par un point à l'infini sur lequel se projette la droite $(O, \vec{e_1})$.

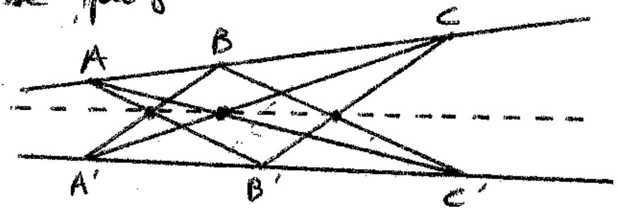


Figure 4 : théorème de Pappus généralisé.

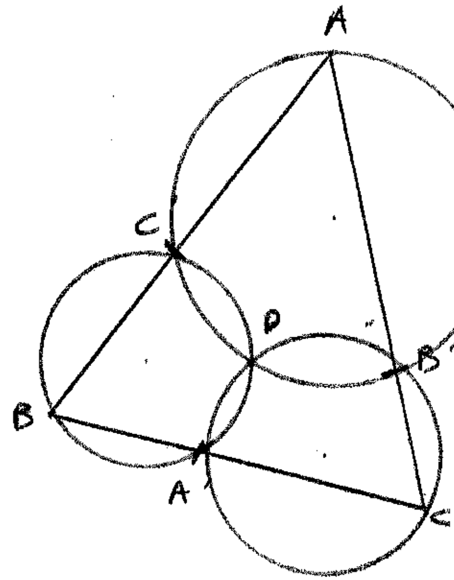


Figure 5 : Pivot.

RÉFÉRENCES

[AUD] Michèle Audin, "Géométrie", EDP Sciences, 2009

[COM] François Combes, "Algèbre et géométrie", Bréal Éditions, 1998

[H2G2] Philippe Caldero et Jérome Germoni, "Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome premier", Calvage & Mounet, 2013

[PER] Daniel Perrin, "Cours d'algèbre", Ellipses, 2008

Isomorphisme exceptionnel :

Théorème : Soit G le groupe des quaternions de norme 1. On a un isomorphisme $\bar{\lambda} : G/\{-1;1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$

démonstration :

Rappel : Soit $(q_1,q_2) \in \mathbb{H}^2$, $\overline{q_1q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$, $N(q_1) = q_1\overline{q_1}$, $N(q_1q_2) = N(q_1)N(q_2)$ et $q_1^{-1} = \frac{1}{N(q_1)}\overline{q_1}$.

0) $\mathbb{H}$ est non commutatif donc $\mathbb{H}^*$ opère sur $\mathbb{H}$ par automorphismes intérieurs de façon non trivial. On peut se restreindre à l'action de G sur $\mathbb{H}$, car si $q \in \mathbb{H}^*$, il s'écrit $q = \lambda g$ avec $\lambda = \sqrt{N(q)} \in \mathbb{R}$ et $g \in G$ et comme $\mathbb{R}$ est central dans $\mathbb{H}$, il ne donne rien dans les automorphismes intérieurs.
On pose donc pour $q \in G$:
$$S_q : \begin{cases} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ q' \longmapsto qq'q^{-1} = qq'\bar{q} \end{cases}$$
Nous allons étudier cette action et montrer qu'elle donne une paramétrisation du groupe $SO_3(\mathbb{R})$ par le groupe G.

1) L'application $S_q : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et vérifie :
$$S_{\bar{q}} \circ S_q(q') = \bar{q}qq'\bar{q}\bar{\bar{q}} = \underbrace{N(q)}_{=1}q'\underbrace{N(q)}_{=1} = q', \quad \forall q \in G, \forall q' \in \mathbb{H}.$$
Donc $S_{\bar{q}} \circ S_q = id_{\mathbb{H}}$. En identifiant $\mathbb{H}$ à $\mathbb{R}^4$, on a l'application :
$$S : \begin{cases} G \longrightarrow GL_4(\mathbb{R}) \\ q \longmapsto S_q \end{cases}$$

2) Montrons que S est un homomorphisme et que $Ker(S) = \{-1;1\}$:
Soit $(q_1,q_2) \in G^2$, $S_{q_1q_2}(q') = q_1q_2q'\overline{q_1q_2} = q_1q_2q'\overline{q_2}\,\overline{q_1} = S_{q_1} \circ S_{q_2}(q')$ $\forall q' \in \mathbb{H}$.
Calculons le noyau : Soit $q \in G$ tel que $S_q = id_{\mathbb{R}^4}$ alors $qq'\bar{q} = q'$ $\forall q' \in \mathbb{H}$ donc $qq' = q'q$ $\forall q' \in \mathbb{H}$. Ainsi $q \in Z(\mathbb{H}) \cap G$, où $Z(\mathbb{H})$ est le centre de $\mathbb{H}$, càd $q \in \{-1;1\}$.

3) Soit $q \in G$ et $a \in \mathbb{R}$: $S_q(a) = qaq^{-1} = aqq^{-1} = a$ donc $S_q|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$.

4) La norme $N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q$ est une forme quadratique réel définie positive sur $\mathbb{H}$, de forme bilinéaire associée $\langle q,q' \rangle = \frac{1}{2}(q\bar{q'} + q'\bar{q})$. $(\mathbb{H},N)$ est ainsi un $\mathbb{R}$-evn de dimension 4 et $(1,i,j,k)$ en est une base orthonormée.
Montrons que $S_q \in O(N) \simeq O_4(\mathbb{R})$ $\forall q \in G$:
Soit $q \in G$ et $q' \in \mathbb{H}$: $N(S_q(q')) = N(qq'\bar{q}) = \underbrace{N(q)}_{=1}N(q')\underbrace{N(\bar{q})}_{=1} = N(q')$
Donc S_q est un élément du groupe orthogonal euclidien défini par N.
Ainsi $S : G \longrightarrow O_4(\mathbb{R})$.

5) Montrons que $\mathcal{P}$, l'ensemble des quaternions purs, est stable par S_q, $\forall q \in G$:

•) Pour N, $\mathcal{P}$ est l'orthogonal de $\mathbb{R}$. En effet $\langle p, r\rangle = 0$ $\forall p \in \mathcal{P}, \forall r \in \mathbb{R}$ et si $p \in \mathbb{H}$ vérifie $\langle q, r\rangle = 0$ $\forall r \in \mathbb{R}$ alors $q + \bar{q} = 0$ donc $N(q) = q\bar{q} = -q^2$ et $q^2 \in \mathbb{R}_-$ ce qui entraine que $p \in \mathcal{P}$ par caractérisation des quaternions purs.

•) On a montré qu'à $q \in G$ fixé, S_q laisse stable $\mathbb{R}$, que $S_q \in O(N)$ et que $\mathcal{P} \perp_N \mathbb{R}$ donc S_q laisse $\mathcal{P}$ stable.

On pose alors $s_q = S_q|_{\mathcal{P}}$, on a $s_q \in O(N|_{\mathcal{P}}) \simeq O_3(\mathbb{R})$ et :

$$s : \begin{cases} G \longrightarrow O_3(\mathbb{R}) \\ q \longmapsto s_q \end{cases}$$ est un homomorphisme de noyau $\{-1;1\}$

6) Munissons $O_3(\mathbb{R})$ de sa topologie naturelle obtenue en le considérant comme sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, lui même identifié à $\mathbb{R}^9$. L'application s est alors continue, comme on le voit en calculant la matrice de s_q dans la base i, j, k. En effet, si $q = a + bi + cj + dk$, les coefficients de la matrice sont des polynômes homogènes de degré 2 en a, b, c, d. Par exemple :

$$s_q(i) = q i \bar{q} = (a+bi+cj+dk)\, i\, \overline{(a+bi+cj+dk)} = (a+bi+cj+dk)(ai+b-ck+dj)$$
$$= a^2 i + ab - ack + adj - ab + b^2 i + bcj + bdk - ack + bcj - c^2 i - cd + adj + bdk + cd - d^2$$

D'où $s_{q11} = a^2+b^2-c^2\ d^2$, $s_{q21} = 2(ad+bc)$, $s_{q31} = 2(bd-ac)$ ...

Mais, le déterminant, $\det : O_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \{-1;1\}$ est lui aussi une application continue. Or si l'on identifie $\mathbb{H}$ à $\mathbb{R}^4$ muni de sa topologie naturelle, on voit que G est homéomorphe à S^3 et en particulier connexe.

Donc l'image de G par $\det \circ s$ est connexe, donc un singleton, et comme $s(1) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_3}$, c'est nécessairement $\{+1\}$. Autrement dit $s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$.

7) Montrons enfin que $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$:

Soit $p \in \mathcal{P} \cap G$. On calcule $s_p(p) = pp\bar{p} = p$, donc s_p fixe p et est une rotation d'axe p.

D'autre part, comme $p \in \mathcal{P} \cap G$, on a $\bar{p} = -p$ donc $p^2 = -p\bar{p} = -1$ et $(s_p)^2 = s_{p^2} = s_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_3}$, donc s_p est une involution.

s_p est donc le renversement d'axe $\langle p \rangle$. On obtient ainsi tous les renversements de $SO_3(\mathbb{R})$, et comme ils engendrent le groupe, on a bien $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$.

Finalement, d'après le premier théorème d'isomorphisme, on a :

$$G/\{-1;1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$$

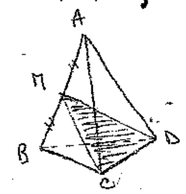
Isométries du cube et du tétraèdre :

Théorème 1 : Soit T un tétraèdre régulier alors $Is(T) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $Is^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$.

démonstration :

1) Soit $T := ABCD$ un tétraèdre régulier. Soit $g \in Is(T)$ une isométrie du tétraèdre, alors g conserve les distances donc g laisse stable $\mathcal{S} := \{A, B, C, D\}$.
Faisons donc agir $Is(T)$ sur $\mathcal{S}$:

$$\varphi : \begin{cases} Is(T) \longrightarrow \mathfrak{S}(A,B,C,D) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ f \longmapsto \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ f(A) & f(B) & f(C) & f(D) \end{pmatrix} \end{cases}$$



2) φ est un homomorphisme car les isométries conservent les distances.

3) Montrons que φ est fidèle (injectivité) :
Soit $f \in Is(T)$ telle que $\varphi(f) = id_{\mathcal{S}}$. Alors l'application affine f fixe le repère affine $\mathcal{S} = \{A, B, C, D\}$ donc $f = id_{\mathbb{R}_3}$.
Ainsi φ est injectif : $Is(T) \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$.

4) Montrons que φ est surjectif :
Soit M le milieu de $[AB]$, la réflexion par rapport au plan MCD laisse fixe C et D, et permute les sommets A et B.
Ainsi la permutation $(A;B)$ a un antécédent par φ. De même, on montre que toutes les permutations de $\mathfrak{S}(A,B,C,D)$ sont dans $\varphi(Is(T))$.
Or $\mathfrak{S}_4$ est engendré par les permutations donc $\varphi(Is(T)) = \mathfrak{S}_4$.
Ainsi φ est surjectif : $Is(T) \simeq \mathfrak{S}_4$.

5) $Is^+(T)$ est un sous-groupe d'indice 2 dans $Is(T)$. En effet, soit $g \in Is^-(T)$ alors l'application $\begin{cases} Is^+(T) \longrightarrow Is^-(T) \\ f \longmapsto f \circ g \end{cases}$ est bijective et $\mathfrak{A}_4$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$ donc $Is^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$.

Théorème 2 : Soit K un cube alors $Is(K) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $Is^+(K) \simeq \mathfrak{S}_4$.

démonstration :

1) Montrons que $Is(K) \simeq Is^+(K) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il ne nous restera plus qu'à montrer que $Is^+(K) \simeq \mathfrak{S}_4$.
Soit O le centre du cube K et $g \in Is(K)$. Comme les isométries laissent stable les barycentres, $g(O) = O$ en tant qu'isobarycentre de K.
Soit s_0 la symétrie de centre O. Si on vectorialise notre espace en O, l'application linéaire associée à s_0 est $-Id$ et donc $s_0 g = g s_0$. Ceci étant vraie pour tout $g \in Is(K)$, l'application $\begin{cases} Is(K) \longrightarrow Is^+(K) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ g \longmapsto \begin{cases} (g, 1) & \text{si } g \in Is^+(K) \\ (g s_0, 2) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ est bijective.

2) Les grandes diagonales du cube sont les segments de longueur maximale reliant deux sommets du cube. Il y en a exactement 4. On les note D_1, D_2, D_3, D_4. Soit $g \in Is^+(K)$, g conserve donc les distances et laisse stable $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$. Faisons donc agir $Is^+(K)$ sur $\mathcal{D}$:

$$\psi : Is^+(K) \longrightarrow \mathfrak{S}(D_1, D_2, D_3, D_4) \simeq \mathfrak{S}_4$$
$$g \longmapsto \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \\ g(D_1) & g(D_2) & g(D_3) & g(D_4) \end{pmatrix}$$

3) ψ est un homomorphisme car les isométries conservent les distances.

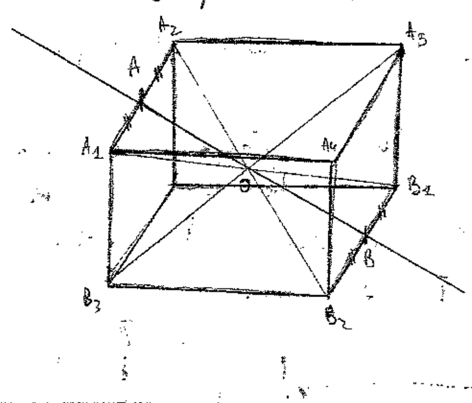
4) Montrons que ψ est fidèle :
Soit $g \in Is^+(K)$ telle que $\psi(g) = id_{\mathcal{D}}$, c'est à dire $g(D_i) = D_i \quad \forall i \in [\![1;4]\!]$. Donc g permute A_i et B_i ou les laisse fixes tous les deux, et ce pour tout i de 1 à 4.

·) Supposons que $g(A_1) = A_1$ et donc $g(B_1) = B_1$, et $g(D_i) = D_i \quad \forall i \in [\![2;4]\!]$. Comme $A_1A_2 \neq A_1B_2$ et que g est une isométrie, on a $g(A_2) = A_2$ et $g(B_2) = B_2$. De même $g(A_4) = A_4$.
Ainsi g préserve le repère affine (A_1, A_2, B_2, A_4), donc $g = id_{\mathbb{R}_3}$.

·) Supposons que $g(A_1) = B_1$ et donc $s_0 \circ g(A_1) = A_1$. D'après ce qui précède, $s_0 \circ g = id_{\mathbb{R}_3}$. Or $s_0 \in Is^-(K)$, $g \in Is^+(K)$ et $id_{\mathbb{R}_3} \in Is^+(K)$.
On a donc une contradiction.
Ainsi, ψ est injectif : $Is^+(K) \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$.

5) Montrons que ψ est surjectif :
Soit A milieu de $[A_1A_2]$ et B milieu de $[B_1B_2]$. La rotation d'angle π autour de l'axe (AB) laisse stable D_3 et D_4 et permute D_1 et D_2. La permutation $(D_1 ; D_2)$ a donc un antécédent par ψ. Il en va de même pour toutes les permutations, or $\mathfrak{S}_4$ est engendré par les permutations, donc ψ est surjectif.

Finalement $Is^+(K) \simeq \mathfrak{S}_4$ et donc $Is(K) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.



K

$D_i = A_iB_i \quad \forall i \in [\![1;4]\!]$