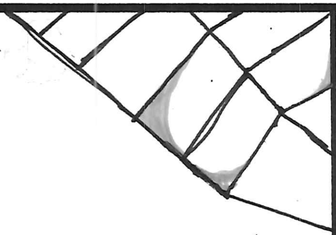
Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

916

Motivation : formalisation de la logique.



I Syntaxe.

1) Définition des formules.

Comment est caractérisé le langage propositionnel ?

Déf 1 [LR, p 8] :
Il est caractérisé par un alphabet $\mathcal{A}$, constitué de :
- un ensemble fini de symboles : $\mathcal{P} = \{p, q, r\ldots\}$, appelés variables propositionnelles ;
- un ensemble de connecteurs :
  $\neg$ (non), $\wedge$ (et), $\vee$ (ou),
  $\Rightarrow$ (implication), $\Leftrightarrow$ (équivalence) ;
- les parenthèses (et).

$\neg$ est un connecteur unaire ; les autres sont des connecteurs binaires.

Déf 2 :
Un mot (ou expression) est une suite finie de symboles de $\mathcal{A}$. L'ensemble des mots est noté $\mathcal{A}^*$.

Exemples. $\neg p$, $(p \vee (q \Rightarrow r))$ et $(p(\vee\neg\vee)$ sont des mots. Seuls certains sont intéressants pour la logique.

Déf 3 :
L'ensemble des formules construit sur $\mathcal{P}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{F}$ tel que :
- $\forall x \in \mathcal{P}$, alors $x \in \mathcal{F}$.
- Si $F \in \mathcal{F}$ alors $\neg F \in \mathcal{F}$.
- Si α est un connecteur binaire, si $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$, alors $(F \alpha G) \in \mathcal{F}$.

Cet ensemble est bien défini ; l'ensemble des mots, $\mathcal{A}^*$ respecte ces conditions, et $\mathcal{F}$ est non vide car contient $\mathcal{P}$.
On peut aussi définir cet ensemble par récurrence :

Déf 4 :
Les ensembles $\mathcal{F}_n$ sont définis par :
- $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$
- $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\neg F \,;\, F \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(F \alpha G) \,;\, F \in \mathcal{F}_n,\ G \in \mathcal{F}_n\}$

Propo 5 :
La suite $\mathcal{F}_n$ est croissante, et on a : $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Déf 6 [CL, p 20]
La hauteur d'une formule F est le plus petit $n \in \mathbb{N}$, tel que $F \in \mathcal{F}_n$. On la note $h(F)$.

2) Quelques propriétés issues de la définition inductive.

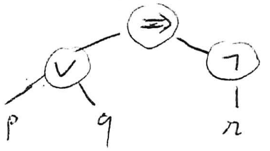
Théorème 7 (de non-ambiguïté) [CL, p 27] :
Si F est une formule, alors elle s'écrit de manière unique sous la forme :
- d'une variable propositionnelle, ou ;
- $F = \neg G$, où $G \in \mathcal{F}$, ou :
- $(G \alpha H)$, où $\alpha \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ et $G \in \mathcal{F}$ et $H \in \mathcal{F}$.

Remarque : lorsque les parenthèses sont superflues, on s'autorisera à les ôter. $(p \vee (q \vee r))$ deviendra $p \vee (q \vee r)$.

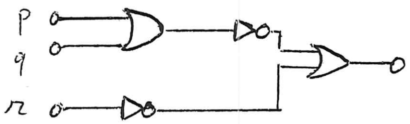
Déf 8 [LR, p 11] :
Un arbre est un ensemble ordonné satisfaisant :
- il possède un plus petit élément, appelé racine de l'arbre.
- l'ensemble des minorants de chaque élément est totalement ordonné.

Exemple : $F = ((p \vee q) \Rightarrow \neg r)$

Arbre représentant F :



Circuit logique



Déf 9 [CL, p29]:

L'ensemble des sous formules de $F \in \mathcal{F}$ peut se définir par induction :
- si $F = p \in \mathcal{P}$, $sf(F) = \{p\}$.
- si $F = \neg G, G \in \mathcal{F}$: $sf(F) = \{F\} \cup sf(G)$.
- si $F = (G \alpha H)$, $sf(F) = \{F\} \cup sf(G) \cup sf(H)$.

Déf 10 (substitution) [LR, p17]:

La substitution de G à p dans F, notée $F(G/_p)$, est définie par induction sur F :
- si $F = p$, alors $F(G/_p) = G$; si $F = q \neq p$, $F(G/_p) = q$.
- si $F = \neg H$, alors $F(G/_p) = \neg H(G/_p)$.
- si $F = F_1 \alpha F_2$, alors $F(G/_p) = F_1(G/_p) \alpha F_2(G/_p)$.

Remarque : On ne fait qu'une substitution à la fois, il est possible de définir plusieurs substitutions simultanées.

Exemple : $F = ((p \vee q) \Rightarrow r)$ et $G = (r \vee q)$.

Alors $F(G/_p) = (((r \vee q) \vee q) \Rightarrow r)$.

II Sémantique.

Permet d'interpréter les formules précédemment définies.

1) Valuations.

Déf 11 [LR, p13]:

Une valuation $v : \mathcal{P} \to \{0,1\}$ associe à chaque variable une valeur. Elle possède un unique prolongement à $\mathcal{F}$, noté v, par les règles usuelles: $v(\neg F) = \neg v(F)$, $v(F \alpha G) = v(F) \alpha v(G)$.

Soit v une valuation. A partir des valeurs associées aux variables, on peut construire les tables de vérité pour identifier la valuation d'une formule F.

Exemple: $F = p \alpha q$ (cf annexe).

On identifie plus facilement le point de vue "circuit électrique" : une variable ayant une valuation de 1 correspond à une entrée positive, le courant passe dans cette entrée.

2) Notions fondamentales et propriétés immédiates.

Déf 12 [LR, p15]

Une formule F est satisfaite par la valuation v si $v(F) = 1$. F est dite satisfaisable.

Une tautologie est une formule qui est satisfaite par toute valuation. Une antilogie n'est satisfaite par aucune.

Deux formules F et G sont équivalentes si, pour toute valuation v, $v(F) = v(G)$.

Exemple $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ est une tautologie.

$((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q))$ aussi.

$\neg\neg p$ et p sont des formules équivalentes.

- On tire des tautologies les règles de De Morgan:

  $\neg(F \vee G) \Leftrightarrow (\neg F \wedge \neg G)$ $\qquad \neg(F \wedge G) \Leftrightarrow \neg F \vee \neg G$.
- On n'a pas la même signification dans le langage courant.

  F = si tu as faim, il y a des épinards au frigo. [CL, p34]

  G = S'il n'y a pas d'épinard dans le frigo, tu n'as pas faim.

Déf 13 [LR, p16]

Soit Σ un ensemble de formules, et F une formule.
- Σ est satisfaisable s'il existe v valuation telle que: $\forall G \in \Sigma$, $v(G) = 1$.
- F est conséquence de Σ si toute valuation satisfaisant Σ satisfait F.

Exemple : F est conséquence de Σ si et seulement si $\Sigma \cup \{\neg F\}$ n'est pas satisfaisable.

Déf 14 [LR, p 17] :
Une occurence de la variable p dans la formule F est la donnée de cette variable et d'une place où elle apparait dans F.

Prop 15 :
La valuation d'une formule F ne va dépendre que de la valuation des variables ayant une occurence dans F.

3) Théorèmes

Problème : On veut démontrer la satisfiabilité de certaines formules ; on dénote ce problème SAT.

Th 16 (de Cook) [WOL, p 185] : SAT est NP-complet. $\boxed{DVT}$

Déf 17 [LR, p44] :
- Un ensemble de formules T est finiment satisfaisable si tout sous-ensemble fini de T est satisfaisable.
- T, finiment satisfaible, est maximal si pour toute formule F, $F \in T$ ou $\neg F \in T$.

Th 18 (de compacité) [CL, p 61] $\boxed{DVT}$
Un ensemble de formules T est satisfaisable si et seulement si T est finiment satisfaisable.

IV Disjonctions, conjonctions et déduction.

1) Formes normales disjonctives et conjonctives.

Déf 19 :
Un système complet de connecteurs est un sous-ensemble de $\{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ qui permet, à chaque formule, de trouver une formule équivalente ayant uniquement les connecteurs du sous-ensemble.

Exemple : Avec $\{\neg, \wedge\}$, on a : $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$
et $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

Déf 20 [LR, p 21]
Une forme normale disjonctive est une formule F de la forme :
- ou bien $F_1 \vee \ldots \vee F_k$, où $\forall i$, $F_i = G_1 \wedge \ldots \wedge G_{\ell(i)}$ où chaque G_j est une variable ou sa négation.
- ou bien un F_i précédemment défini.

Les formes normales conjonctives sont, elles, des conjonctions de disjonctions de variables propositionnelles ou de leur négation.

Remarque : $\{\vee, \neg, \wedge\}$ est un système complet de connecteurs.

Th (de forme normale) 21 [LR, p 23]
Toute formule est logiquement équivalente à au moins une formule sous FNC.

En pratique : tables de vérité ou utiliser l'élimination de connecteurs

2) Clauses et règles de coupure.

Déf 22 [LR, p 26] :
$C = (G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_\ell)$ est une clause si $\forall i$, G_i est une variable ou la négation d'une variable.
$\Delta := \{G_i \mid G_i$ est sans négation$\}$ $\Gamma := \{\neg G_i \mid G_i = \neg p$, où p une variable$\}$.

Exemple : $C = p \vee \neg q \vee r$.
$\Delta = \{p; r\}$ $\Gamma = \{q\}$.

Déf 23 : Règle de coupure [LR, p 31].
Soient $C_1 = (\Gamma_1, \Delta_1)$ et $(\Gamma_2, \Delta_2) = C_2$ deux clauses. Si $p \in \Gamma_2 \cap \Delta_1$, alors on peut déduire de C_1, C_2 la formule $C = (\Gamma, \Delta)$, où $\Gamma = \Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \{p\})$, $\Delta = \Delta_2 \cup (\Delta_1 \setminus \{p\})$

Exemple d'utilisation : abstraction de contraintes propositionnelles

On notera : $\dfrac{C_1 \quad C_2}{C}$

Exemple : $C_1 = p \vee q \vee \neg r$
$C_2 = q \vee r$

$\dfrac{C_1 \quad C_2}{p \vee q}$.

ANNEXE :

$F = p \alpha q$.

p	q	$\alpha = \wedge$	$\alpha = \vee$	$\alpha = \Rightarrow$	$\alpha = \Leftrightarrow$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Réf :

[LR] : Lassaigne-Rougemont,
Logique et fondements de l'informatique.

[CL] : Cori Lascar,
Logique mathématique, tome 1.

[WOL] : Wolper,
Introduction à la calculabilité.