- **Pourquoi la notion de groupe distingué est-elle naturelle ?**
  - Motivations. *L'exemple du cercle :* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
  - Notion de relation d'équivalence compatible avec une loi.
    Pour que la projection soit un morphisme, il faut que l'on ait : $x \sim y \;\Rightarrow\; \forall z,\; xz \sim yz$.
  - Définition de sous groupe distingué.
    Si la projection est un morphisme alors la relation se réécrit $x \sim y \;\Leftrightarrow\; xy^{-1} \in Ker\pi$ *Si H est un sous groupe de G vérifiant Hg=gH pour tout g dans G alors la relation* $x \sim y \;\Leftrightarrow\; xy^{-1} \in H$ *est compatible.*
- **Comment les contruit-on ?**
  - Ce sont exactement les noyaux des morphismes de groupe. *Application : Si un groupe est simple alors tout morphisme est injectif. Exemple* $SO_3(\mathbb{R})$ *est simple* **développement**.
  - On obtient des sous groupes distingués en prenant le noyau d'une action. *Exemple : l'action du groupe linéaire sur l'espace projectif.*
  - Les sous groupes d'indice 2 sont distingués. *Le groupe alterné dans les permutations et* $SO_3(\mathbb{R})$ *dans* $O_3(\mathbb{R})$.
  - Les automorphismes intérieurs sont distingués dans les automorphismes. *Exemple, les automorphismes de* S_6 **développement**.
  - Un groupe est distingué dans son normalisateur. *Exemple le normalisateur de* A_3 *dans* S_4 *est* S_3.
  - Les sous groupes caractéristiques.
    - Definition et propriété. $K \lhd_{car} H \lhd G \Rightarrow K \lhd G$
    - Le centre. *Exemple centre de* $SO_n(\mathbb{R})$ *composé des matrices scalaires.*
    - Le groupe dérivé. *Exemple :* $SO_3(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(O_3(\mathbb{R}))$.
- Comment s'en sert-on ?
  - Les propriétés universelles. Exemples :
    - PU 1 : $G/Ker\phi \cong Im\phi$ et factorisation. *exemple* $IntG$ *isomorphe à* $G/Z(G)$.
    - PU 2 : Si $K < G$,$H < G$ et $K \subset N_G(K)$ alors $H \lhd HK = KH \lhd G$, $(K \cap H) \lhd K$ et $KH/H \cong K/(K \cap H)$ (réf : Félix Ulmer, Théorie des groupes page 78). *Exemple d'utilation théorème de Sylow* **développement**.
    - PU 3 : $H < K < G$ et $H \lhd G$ et $k \lhd G$ alors $(G/H)/(K/H) \cong (G/K)$ (réf : Félix Ulmer, Théorie des groupes page 64). exemple $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$ isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
  - L'abélianisé. *Propriété :* $\mathcal{D}(G) < H \Leftrightarrow H \lhd G$ *et* G/H *abélien (réf : Félix Ulmer, Théorie des groupes page 62) . Exemple* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *comme abélianisé de* $O_3(\mathbb{R})$.
- **A quoi servent-ils ?**
  - Rendre les choses intrinsèques :Refuser de choisir ; ne considérer les objects qu'au travers de leurs propriétés commune. *Exemple : Espaces de Lebesgue.*
  - Rendre la structure d'un groupe plus explicite en la décomposant.*Exemple le groupe diédral, comme produit du groupe engendré par une transposition et d'un autre par un rotation.*
  - Modéliser plus facilement certaines propriétés ; Etendre un groupe.*Exemple de* PSL_n *(qui étend les fonctions affines...).*
  - Mettre en évidence des propriétés de certains objet, les coder dans le formalisme des groupes. *exemple, le groupe des isométries d'un triangle est simple si et seulement si le triangle n'est pas équilatéral .*