261 Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

On considère X une va sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

I] Définitions et premières propriétés

1) Fonction caractéristique

[B-L] p.61

Def 1: On appelle fonction caractéristique de X la fonction notée φ_X définie par :
$\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X\rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} d\mathbb{P}_X(dx)$.

Rq: φ_X est définie sur tout $\mathbb{R}^d$.

[F-F] p.164

Rq: • Si X est une va de loi discrète $\sum_k p_k \delta_k$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\varphi_X(t) = \sum_k p_k e^{itk}$.

• Si X est une va réelle de densité f, alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$.

[F-F] p.165

Ex 2: • Si $X \sim b(p)$ alors $\varphi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$.

• Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.

• Si X suit une loi de Laplace de densité $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ alors $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

[OUV] p.237

• Si $X = (X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur gaussien, alors $\forall u \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(u) = \exp(i\langle u, m\rangle - \frac{1}{2}{}^t u \Gamma u)$ où $m = \mathbb{E}[X]$, $\Gamma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}$.

[F-F] p.164

Prop 3:
1) $\varphi_X(0) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
2) $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$
3) Si $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(-X)$ alors φ_X est réelle et paire.
4) $\varphi_{AX+b}(t) = \varphi_X(A^*t)e^{i\langle b,t\rangle}$ $\forall b \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
5) φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

[F-F] p.166

Thm 4: La fonction caractéristique d'une va caractérise sa loi : si deux va admettent la même fonction caractéristique, alors elles ont même loi.

[B-L] p.63

Thm 5 (Formule d'inversion de Fourier) Si φ_X est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, alors X admet une densité continue bornée f_X donnée par :
$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x\rangle}\varphi_X(t)dt$.

[B-L] p.64

Appli 6: $X \sim \mathcal{E}(1)$, $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Thm 5 pour la loi de Laplace : $\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\frac{1}{1+t^2}dt$.
D'où $\varphi_X(t) = e^{-|x|}$.

2) Transformée de Laplace

[B-L] p.66

Def 7: On appelle transformée de Laplace de X la fonction L_X définie par $L_X(s) = \mathbb{E}[e^{\langle s, X\rangle}]$ pour les valeurs de s telles que $e^{\langle s,X\rangle}$ est intégrable.

[OU] p.162

Ex 8: • Si $X \sim b(p)$, $L_X(s) = 1 - p + pe^s$ pour $s \in \mathbb{R}$
• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $L_X(s) = e^{\lambda(e^{\lambda}-1)}$ pour $s \in \mathbb{R}$.
• Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $L_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$ pour $s \in]-\infty; \lambda[$.

Rq: L_X est toujours définie en 0 et vérifie $L_X(0) = 1$.
Il existe des va pour lesquelles L_X n'est définie qu'en 0 : pour $X \sim \mathcal{C}(1)$ par exemple.

[F-F] p.169

Prop 9:
1) Si X est bornée alors L_X est définie et continue sur $\mathbb{R}^d$.
2) Si X est à valeurs réelles positives, L_X est continue et bornée sur $]-\infty; 0]$.
3) Si $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(-X)$ alors L_X est paire.

[F-F] p.160

Thm 10: La transformée de Laplace d'une va caractérise sa loi.

Appli 11: Etude de la loi gamma : $\Gamma(a, \lambda)$. $\boxed{\text{DVP}}$

III] Moments et indépendance

1) Moments

[OUV] p.204

Prop 12 :
Soit X va réelle.
- Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ alors φ_X est de classe C^n et $\forall 1 \leq k \leq n$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.
En particulier $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.
- Inversement, si φ_X est k-fois dérivable en 0, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\left[\frac{k}{2}\right]$, donnée par la formule ci-dessus.

Ex 13 : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Prop 12 $\Rightarrow$ φ_X dérivable et on trouve $\varphi_X'(t) = -t\varphi(t)$.
Donc $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.
On a alors : si $Y \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $\varphi_Y(t) = e^{itm - \sigma^2 t^2/2}$.

[B-L] p.68

Rq : Les moments ne caractérisent pas la loi en général :
$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Z = e^X$ de densité $f_Z(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y} e^{-(\ln y)^2/2} \mathbb{1}_{]0;\infty[}(y)$
$a \in [-1;1]$, Z_a de densité $f_a(x) = f_Z(x)(1 + a\sin(2\pi \ln x))$, $x > 0$.
Z et Z_a ont les mêmes moments mais pas même loi.

[B-L] p.65

Cor 14 :
Si φ_X est analytique, alors la loi de X est caractérisée par ses moments.

[B-L] p.66

Prop 15
Soit X une va réelle telle que e^{tX} est intégrable pour t dans un intervalle ouvert contenant 0. Alors L_X est définie sur un intervalle ouvert contenant 0.
De plus elle est analytique sur un voisinage de 0, sur lequel on a : $L_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}[X^n]$.
En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$.

2) Indépendance

[OUV] p.200-202

Prop 16 :
Soient X, Y des va à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$.
$X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, $\varphi_{(X,Y)}(t,s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s)$

La fonction caractéristique s'obtenant par $\varphi_X(t) = \varphi_{(X,Y)}(t,0)$ et $\varphi_Y(t) = \varphi_{(X,Y)}(0,s)$, on obtient un second critère d'indépendance :

Prop 17 :
$X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, $\varphi_{(X,Y)}(t,s) = \varphi_{(X,Y)}(t,0)\varphi_{(X,Y)}(0,s)$

Ex 18 : $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ de loi de Laplace : $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
$Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_1 + X_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$
$\varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = \frac{1}{1+t_1^2} \cdot \frac{1}{1+t_2^2}$
$\varphi_{(Y_1,Y_2)}(t_1,t_2) = \varphi_{(X_1,X_2)}(t_1+t_2, -t_1+t_2) = \frac{1}{1+(t_1+t_2)^2} \cdot \frac{1}{1+(-t_1+t_2)^2}$
$\Rightarrow \varphi_{Y_1}(t_1) = \frac{1}{(1+t_1^2)^2}$, $\varphi_{Y_2}(t_2) = \frac{1}{(1+t_2^2)^2}$
$Y_1 \not\perp\!\!\!\perp Y_2$ car $\varphi_{(Y_1,Y_2)}(1,1) \neq \varphi_{Y_1}(1)\varphi_{Y_2}(1)$

[F-F] p.163

Thm 19 :
Soient X, Y deux va indépendantes. Alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Cte-ex 20 : $X \sim \mathcal{E}(1)$, $Y = X$.
$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{2X}(t) = e^{-2|t|} = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, mais $X \not\perp\!\!\!\perp Y$.

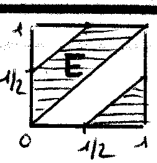
Ex 21 :
- Si $X \sim B(n,p)$, $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)^n = (1-p+pe^{it})^n$ où $Y \sim b(p)$.
- La somme de va de loi normale indépendantes suit une loi normale : $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2) \perp\!\!\!\perp X_2 \sim \mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$
$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

[F-F] p.160

Thm 22 :
- $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow L_{X+Y}(t) = L_X(t)L_Y(t)$.
- $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $L_{(X,Y)}(t,s) = L_X(t)L_Y(s)$.

[F-F] p.161

<u>Cte-ex 23</u> : (X,Y) de densité $f(x,y) = \begin{cases} 2 \text{ si } (x,y)\in E \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$



$L_{X+Y}(s) = L_X(s) L_Y(s)$ mais $X \not\perp\!\!\!\perp Y$.

<u>Ex 24</u> : $X \sim B(n,p)$, $Y \sim b(p)$.
$L_X(s) = L_Y(s)^n = (1-p+pe^s)^n \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

<u>Appli 25</u> : Lois composées.
(X_i) iid de loi $b(p)$, $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
Alors $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

III | Convergence en loi

1) Définition et caractérisation

[B-L] p.122

<u>Def 26</u> : Soit $(X_n)_n$ une suite de va. On dit que X_n converge en loi vers X si $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$ en tout point de continuité de F_X (fonction de répartition). On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

<u>Def 27</u> (définition équivalente à la Def 26)
(X_n) converge en loi vers X si $\mathbb{E}[g(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[g(X)]$ pour toute fonction g continue bornée.

<u>Thm 28</u> (Levy)
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

[B-L] p.132

<u>Appli 29</u> : Loi faible des grands nombres L^1.
Soit $(X_n)_n$ suite de va iid L^1.
Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$, où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

[OUV] p.310

<u>Appli 30</u> : (Théorème de Poisson)
Soit $(X_n)_n$ suite de va de loi $B(n,p_n)$ avec $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$.
Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

<u>Ex 31</u> : Si $m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} m$ et $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$, alors pour $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ on a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

[COT] p.150

<u>Thm 32</u> :
Si les X_i admettent des transformées de Laplace sur un intervalle I contenant 0, alors :
$\forall t \in I$, $L_{X_n}(t) \longrightarrow L_X(t)$ ssi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

2) Théorème central limite

[B-L] p.136

<u>Thm 33</u> : (TCL) $\boxed{\text{DVP}}$
$(X_n)_n$ suite de va iid L^2.
On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = Var(X_1)$.
Alors $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

<u>Appli 34</u> : Détermination d'un intervalle de confiance asymptotique pour le paramètre d'une Bernoulli.

<u>Références</u>

[F-F] : Foata, Fuchs, <u>Calcul des probabilités</u>, 2ème édition
[B-L] : Barbe, Ledoux, <u>Probabilité</u>
[OUV] : Ouvrard, <u>Probabilités 2</u>, 3ème édition
[COT] : Cottrell, Genon-Catalot, Duhamel, Meyre, <u>Exercices de probabilités</u>