Un homéomorphisme réalisé par l'exponentielle matricielle

2013 – 2014

Théorème.
L'exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *réalise un homéomorphisme entre* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*.*
L'exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *réalise un homéomorphisme entre* $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ *et* $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$*.*

Démonstration. On fait la preuve dans $\mathbb{C}$, celle dans $\mathbb{R}$ est analogue. Soit $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors il existe U unitaire telle que

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, d'où

$$\exp A = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} U^*,$$

donc $\exp A \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrons maintenant que l'exponentielle sur $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est surjective dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$, alors

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

avec U unitaire et $\lambda_i > 0$, donc la matrice hermitienne

$$B = U \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ln \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

vérifie $\exp B = A$.

Montrons que $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est injective. Soit H_1 et H_2 deux matrices hermitiennes telles que $\exp(H_1) = \exp(H_2)$. Puisque $\exp(H_1)$ est un polynôme en H_1, alors H_1 commute avec $\exp(H_2)$. D'autre part, H_2 est diagonalisable :

$$H_2 = PDP^{-1} \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Soit Q un polynôme tel que $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ pour tout i, alors

$$Q(\exp(H_2)) = Q(P\exp(D)P^{-1}) = PQ(\exp(D))P^{-1} = PDP^{-1} = H_2,$$

donc H_2 est un polynôme en $\exp(H_2)$ donc commute avec H_1. On en déduit que H_1 et H_2 sont diagonalisables dans une même base :

$$H_1 = PD_1P^{-1} \quad \text{et} \quad H_2 = PD_2P^{-1} \quad \text{avec } D_1 \text{ et } D_2 \text{ diagonales réelles.}$$

Donc $\exp(D_1) = \exp(D_2)$ et les valeurs propres de H_1 et H_2 sont réelles donc $D_1 = D_2$, d'où $H_1 = H_2$.

L'exponentielle étant continue, il reste à établir que sa réciproque est continue. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ convergeant vers $A \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$, on note $A_p = \exp(B_p)$ et $A = \exp(B)$ avec B_p et B hermitiennes, il s'agit de montrer que $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme induite par la norme 2 : $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$, où ρ désigne le rayon spectral. On dispose alors d'un lemme :

Lemme.
Soit $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alors $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Utilisons ce lemme pour montrer que la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Les matrices A_p sont définies positives, donc leurs valeurs propres sont dans $]0, +\infty[$. De plus, la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A donc est bornée, or $\rho(A_p) = \|A_p\|_2$ donc les valeurs propres des A_p sont bornées. De même, la suite $(A_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A^{-1} donc les valeurs propres des A_p^{-1} sont bornées. On en déduit que les valeurs propres des matrices A_p sont contenues dans un compact de $]0, +\infty[$. En considérant l'image par le logarithme de ces valeurs propres, on obtient que les valeurs propres des matrices B_p sont bornées. De plus, $\rho(B_p) = \|B_p\|_2$, donc la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Soit maintenant $B_0 \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ une valeur d'adhérence de $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$, alors, par convergence de $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vers A, $\exp(B_0) = \exp(B)$ et donc $B_0 = B$ par l'injectivité prouvée précédemment. La suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et admet B comme unique valeur d'adhérence donc converge vers B. □

Démonstration du lemme. $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ donc A est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de A et si $X := x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$ de norme 1, on a

$$\|AX\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2|\lambda_k|^2 \leq \rho(A)^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \rho(A)^2,$$

donc $\|A\|_2 \leq \rho(A)$.

Soit k tel que $\rho(A) = |\lambda_k|$, alors

$$\rho(A) = |\lambda_k| = \|Ae_k\|_2,$$

d'où $\|A\|_2 = \rho(A)$. $\square$

Références

[1] Rached Mneimné, Frédéric Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, 1994, page 62.