Théorème de Jordan.

2013 – 2014

Références : Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

Théorème.
Soit $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$ avec $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, 1-périodique, telle que $\gamma_{|[0,1[}$ soit injective et $\gamma'(t) \neq 0$. Alors $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a deux composantes connexes.

Démonstration. On commence par supposer pour plus de commodités que $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout t (une justification est donnée en fin de document), que $\gamma(0) = 0$ et que $\gamma'(0) = 1$.

Lemme.
Si pour $\varepsilon > 0$ on note Γ_ε^+ (resp. Γ_ε^-) la courbe paramétrée par

$$\gamma_\varepsilon^+(t) = \gamma(t) + i\varepsilon\gamma'(t) \text{ (resp. } \gamma_\varepsilon^-(t) = \gamma(t) - i\varepsilon\gamma'(t))$$

alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \alpha$, $\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^+ = \Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^- = \varnothing$.

Démonstration. Supposons qu'il existe s, t tels que $\gamma(t) = \gamma_\varepsilon^+(s)$ (on peut supposer $|t - s| \leq \frac{1}{2}$), alors

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - (\gamma(s) + (t-s)\gamma'(s))| &= |\gamma'(s)||i\varepsilon - (t-s)| \\ &> |t-s|. \end{aligned}$$

Par ailleurs, γ' est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique donc uniformément continue, donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| \leq \eta \Longrightarrow |\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)| \leq 1.$$

Si $|t - s| \leq \eta$, alors en appliquant le théorème des accroissements finis à $t \mapsto \gamma(t) - (\gamma(s) + (t-s)\gamma'(s))$ on a

$$|\gamma(t) - (\gamma(s) + (t-s)\gamma'(s))| \leq \sup_{t_1 \in [s,t]} |\gamma'(t_1) - \gamma'(s)||t-s| \leq |t-s|.$$

Ceci est impossible donc $|t - s| > \eta$. Posons alors

$$\alpha := \inf_{\frac{1}{2} \geq |t_1 - t_2| \geq \eta} |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|.$$

Alors α est atteint par compacité de $\{\frac{1}{2} \geq |t_1 - t_2| \geq \eta\}$ et continuité de $(t_1, t_2) \mapsto |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|$, on en déduit que $\alpha > 0$ par injectivité de γ.

Soit $\varepsilon < \alpha$ et s, t tels que $\gamma(t) = \gamma_\varepsilon^+(s)$. Alors $|t - s| > \eta$ et on a

$$\begin{aligned}
|\gamma(t) - \gamma_\varepsilon^+(s)| &= |\gamma(t) - (\gamma(s) + i\varepsilon\gamma'(s))| \\
&\geq |\gamma(t) - \gamma(s)| - |i\varepsilon\gamma'(s)| \\
&\geq \alpha - \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

On aboutit donc sur une contradiction, d'où $\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^+ = \varnothing$. De même, $\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^- = \varnothing$. $\square$

Montrons que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ possède au plus deux composantes connexes. Pour cela, posons $\varepsilon < \alpha$ et montrons que tout point de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ peut être relié par un chemin à Γ_ε^+ ou à Γ_ε^- sans couper Γ.

Soit donc $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.
Par compacité de Γ, la distance de z à Γ est atteinte en un point $\gamma(t_0)$ et on a $z - \gamma(t_0) \perp \gamma'(t_0)$ (en dérivant $t \mapsto |z - \gamma(t)|^2$).
Alors la demi-droite $[\gamma(t_0), z)$ rencontre Γ_ε^+ au point $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$ ou Γ_ε^- au point $\gamma_\varepsilon^-(t_0)$. Supposons par exemple que nous soyons dans le premier cas et montrons que $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$ ne rencontre par Γ. Deux cas sont possibles :

- $\gamma(t_0), \gamma_\varepsilon^+(t_0)$ et z sont alignés dans cet ordre. Alors si $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$ rencontrait Γ, cela contredirait la minimalité de $|z - \gamma(t_0)|$.
- $\gamma(t_0), z$ et $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$ sont alignés dans cet ordre. Alors si $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$ rencontrait Γ, ce point serait également sur un $\Gamma_{\varepsilon'}^+$ avec $\varepsilon' \leq \varepsilon$, ce qui contredirait le lemme.

Montrons maintenant que $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a au moins deux composantes connexes. Pour cela, il suffit de trouver deux points de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ qui n'ont pas le même indice par rapport à γ. Choisissons $i\varepsilon$ et $-i\varepsilon$.

$$\operatorname{Ind}_\gamma(i\varepsilon) - \operatorname{Ind}_\gamma(-i\varepsilon) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - i\varepsilon} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) + i\varepsilon} \right) \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t) + \varepsilon^2} \, \mathrm{d}t.$$

Le dénominateur ne peut s'annuler que si $t = 0$ et $\varepsilon = 0$ car $\pm i\varepsilon \notin \Gamma$.

Par ailleurs, $\lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t)}{t} = \gamma'(0) = 1$ donc il existe $\delta > 0$ tel que si $|t| < \delta$, alors $\Re\left(\frac{\gamma^2(t)}{t^2}\right) > \frac{1}{2}$.
On a alors, par changement de variable $t = \varepsilon s$,

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t) + \varepsilon^2} \, \mathrm{d}t &= \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{-\delta/\varepsilon}^{\delta/\varepsilon} \frac{\gamma'(\varepsilon s)}{\gamma^2(\varepsilon s) + \varepsilon^2} \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\varepsilon s)}{1 + \frac{\gamma^2(\varepsilon s)}{(\varepsilon s)^2} s^2} \mathbf{1}_{[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]}(s) \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Or δ a été choisi pour que l'intégrande soit inférieure à $1/(1 + \frac{s^2}{2})$. D'où, par théorème de convergence dominée,

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\varepsilon s)}{1 + \frac{\gamma^2(\varepsilon s)}{(\varepsilon s)^2} s^2} \mathbf{1}_{[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]}(s) \, \mathrm{d}s \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}s}{1 + s^2} = 1.$$

D'autre part, la fonction $(\varepsilon, t) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)+\varepsilon^2}$ est continue sur le compact $[0, \frac{\alpha}{2}] \times \{\frac{1}{2} \geq |t| \geq \delta\}$, elle est donc majorée indépendamment de t et ε par une constante, d'où

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \frac{1}{2}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t) + \varepsilon^2} \, \mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Finalement, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\mathrm{Ind}_\gamma(i\varepsilon) - \mathrm{Ind}_\gamma(-i\varepsilon)) = 1.$$

Donc pour ε suffisamment petit, les indices sont distincts. $\square$

Détails supplémentaires

Montrons que l'on peut se ramener au cas où $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout t, quitte à modifier la période de γ.
Soit

$$s(t) := \int_0^t |\gamma'(u)| \, \mathrm{d}u$$

l'abscisse curviligne de γ, qui est continue car γ est $\mathcal{C}^1$. γ' est continue et non nulle donc s est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il s'agit donc d'une bijection et on peut considérer $\tilde{\gamma} := \gamma \circ s^{-1}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}'(t) &= (s^{-1})'(t)\gamma'(s^{-1}(t)) \\
&= \frac{1}{s'(s^{-1}(t))}\gamma'(s^{-1}(t)) \\
&= \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{|\gamma'(s^{-1}(t))|}.
\end{aligned}$$

On a donc $|\tilde{\gamma}'(t)| = 1$ pour tout t.

Soit $T := s(1)$, montrons que $\tilde{\gamma}$ est T-périodique. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$t + T = \int_0^{s^{-1}(t)} |\gamma'(u)| \, \mathrm{d}u + \int_0^1 |\gamma'(u)| \, \mathrm{d}u = \int_0^{s^{-1}(t)+1} |\gamma'(u)| \, \mathrm{d}u = s(s^{-1}(t) + 1)$$

car γ est périodique. D'où

$$\tilde{\gamma}(t + T) = \gamma \circ s^{-1}(s(s^{-1}(t) + 1)) = \gamma(s^{-1}(t) + 1) = \gamma(s^{-1}(t)) = \tilde{\gamma}(t).$$