Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

2013 – 2014

Référence : Michel Alessandri, *Thèmes de Géométrie : groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999, p.141,160.

Théorème.
Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Lemme.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, K un convexe compact de E et H un sous-groupe compact de $GL(E)$.
Si K est stable par H, alors il existe $a \in H$ fixé par tous les éléments de H.

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur E. Pour $x \in E$, on définit

$$N(x) := \sup_{u\in H} \|u(x)\| = \max_{u\in H} \|u(x)\|,$$

l'existence du maximum étant garantie par compacité de H.

Alors N est une norme sur E :
- Si $N(x) = 0$, on a $\|\mathrm{id}_E(x)\| = 0$, d'où $x = 0$.
- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
- Finalement,

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \max_{u\in H} \|u(x+y)\| \\ &\le \max_{u\in H}(\|u(x)\| + \|u(y)\|) \\ &\le \max_{u\in H} \|u(x)\| + \max_{u\in H} \|u(y)\| \\ &= N(x) + N(y). \end{aligned}$$

De plus, N est invariante par H : $N(v(x)) = N(x)$ pour tout $v \in H$ car $u \mapsto u\circ v$ est une bijection de H.
Enfin, montrons que N est une norme strictement convexe.
Soit $x, y \in E$ tels que $N(x+y) = N(x) + N(y)$. Soit $u_0 \in H$ tel que $N(x+y) = \|u_0(x+y)\|$. On a alors

$$N(x+y) = \|u_0(x) + u_0(y)\| \le \|u_0(x)\| + \|u_0(y)\| \le N(x) + N(y) = N(x+y),$$

d'où $\|u_0(x)+u_0(y)\| = \|u_0(x)\| + \|u_0(y)\|$ et donc $u_0(x)$ et $u_0(y)$ sont positivement liés car $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne, il en est donc de même de x et y par linéarité et inversibilité de u_0.

K étant compact, il existe $a \in K$ de norme minimale pour N. De plus, a est unique. En effet, si a' est de norme minimale pour N, alors $\frac{a+a'}{2} \in K$ car K est convexe et

$$N(a) \leq N\left(\frac{a+a'}{2}\right) \leq \frac{N(a)+N(a')}{2} = N(a)$$

donc a et a' sont positivement liés donc égaux car de même norme.

Pour $v \in H$ on a $v(a) \in K$ car K est stable par H et $N(v(a)) = N(a)$ donc $v(a) = a$, ce qui montre que a est fixe par tous les éléments de H. $\square$

Démonstration du théorème. Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors G agit sur l'espace E des matrices symétriques par congruence, ce qui définit le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(E) \\ A &\longmapsto (\rho_A : S \mapsto AS\,{}^tA) \end{aligned}$$

Ce morphisme est de plus continu, donc le groupe $H := \rho(G)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$.

Par ailleurs, l'orbite de I_n, qui est l'ensemble $\mathcal{E} := \{{}^tMM \mid M \in G\}$, est un compact de E donc son enveloppe convexe K est compacte d'après le théorème de Carathéodory. De plus $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe donc $K \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Enfin, K est stable par H :

$$\rho_A({}^tMM) = {}^t(MA)(MA) \in \mathcal{E}$$

et les éléments de K sont combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{E}$.

On peut donc appliquer le lemme : il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ fixé par tous les éléments de H, *i.e.* ${}^tASA = S$ pour tout $A \in G$. G est donc contenu dans le groupe orthogonal de la forme quadratique associée à S, et donc G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$. $\square$

Détails supplémentairs

Proposition.
Soit q une forme quadratique associée à $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Si $G \subset O(q)$, alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc il existe $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S = T^2$.
Alors, pour $A \in G$,

$$\begin{aligned} S &= {}^tASA \\ T^2 &= {}^tAT^2A \\ I_n &= (T^{-1}\,{}^tAT)(TAT^{-1}) \\ I_n &= {}^t(TAT^{-1})(TAT^{-1}) \end{aligned}$$

D'où $TAT^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. $\square$