253 – Utilisation de la notion de convexité en analyse.

2013 – 2014

Question.

Si K est un convexe fermé d'un espace de Hilbert et que p_K désigne la projection sur K, pourquoi p_K est 1-lipschitzienne ?

Réponse.

On a, pour tous $w, w' \in K$,

$$\langle p_K(u) - u, p_K(u) - w \rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad \langle p_K(v) - v, p_K(v) - w' \rangle \leq 0.$$

En posant $w := p_K(v)$ et $w' := p_K(u)$, on a

$$\langle p_K(u) - u, p_K(u) - p_K(v) \rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad \langle p_K(v) - v, p_K(v) - p_K(u) \rangle \leq 0,$$

d'où, en sommant ces deux relations,

$$\langle p_K(u) - p_K(v), p_K(u) - u + v - p_K(v) \rangle \leq 0.$$

On en déduit

$$\|p_K(u) - p_K(v)\|^2 \leq \langle u - v, p_K(u) - p_K(v) \rangle \leq \|p_K(u) - p_K(v)\| \|u - v\|$$

par Cauchy-Schwarz, d'où le résultat.

Question.

Soit E un espace vectoriel normé et soit $f : E \to \mathbb{R}$ convexe majorée. f est-elle localement minorée ?

Réponse.

Soit $B(a, r)$ une boule de E, on pose $M := \sup_{B(a,r)} f < +\infty$. Pour $x \in B(a, r)$, on écrit $x = a + v$ avec $\|v\| \leq 1$. Alors $a - v \in B(a, r)$, donc

$$f(a) = f\left(\frac{1}{2}(a - v) + \frac{1}{2}(a + v)\right) \leq \frac{1}{2}f(a - v) + \frac{1}{2}f(a + v) \leq \frac{M}{2} + \frac{1}{2}f(x),$$

donc $f(x)$ est minorée sur $B(a, r)$.

Question.

Une fonction convexe minorée est-elle constante ?

Réponse.

Non : $x \mapsto x^2$.

Question.

Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe majorée est-elle décroissante ?

Réponse.

Oui : si $x < y$ et $f(x) < f(y)$, alors la courbe de f est au dessus de la droite passant par $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$, donc f n'est pas majorée.

Question.

Donner un exemple de fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non convexe vérifiant $\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Réponse.

On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, il n'est pas de dimension finie. On considère $E_1 := \{q + \sqrt{2}p \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on écrit $x = q + \sqrt{2}p + x_2$ avec x_2 dans un complémentaire algébrique de E_1 (l'axiome du choix est nécessaire ici) et on définit la forme linéaire $\phi(x) := p + \sqrt{2}q + x_2$. Alors ϕ n'est pas continue en $\sqrt{2}$. En effet, soit (q_n) une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors $\phi(q_n) = q_n$ converge vers $\sqrt{2}$, or $\phi(\sqrt{2}) = 2$, donc ϕ n'est pas continue. Donc ϕ n'est pas convexe, or $\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}$ car ϕ est $\mathbb{Q}$-linéaire.