Théorème de Cauchy-Lipschitz

2013 – 2014

Référence : Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 2006.

On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

où $f : U \to \mathbb{R}^n$ avec U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $(t_0, x_0) \in U$.

Définition. On dit que f est localement lipschitzienne en X si pour tout $(t_1, x_1) \in U$, il existe un voisinage V de x_1, un voisinage W de t_1 et $k > 0$ tels que pour tous $x, y \in V$ et tout $t \in W$, $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|$.

Théorème.
Si f est continue sur U et localement lipschitzienne en X, alors (1) *admet une unique solution maximale.*

Démonstration. f est continue sur U donc (1) est équivalent à

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, X(u))\, du. \tag{2}$$

Soit $V \in \mathcal{V}(x_0), W \in \mathcal{V}(t_0)$ et $k > 0$ comme dans la définition du caractère localement lipschitzien de f, on peut supposer $W \times V$ borné. On note $M := \sup_{W \times V} f$.

On se place sur un cylindre de sécurité : soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset V$ et soit $T > 0$ tel que $[t_0 - T, t_0 + T] \subset W$. On note $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(x_0, r)$ muni de la norme infinie, il s'agit alors d'un espace de Banach.

On définit l'opérateur Φ sur $\mathcal{F}$ par

$$\Phi(Y)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, Y(u))\, du.$$

Il faut d'abord que $\mathcal{F}$ soit stable par Φ.

$$|\Phi(Y)(t) - x_0| \leq |t - t_0| M \leq TM$$

donc en choisissant $T \leq \frac{r}{M}$, $\Phi(Y)$ est bien à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r)$ et donc Φ définit bien un opérateur sur $\mathcal{F}$ (ce choix garantit aussi que le cylindre considéré est bien un cylindre de sécurité).

Le but est maintenant de montrer que Φ admet un point fixe en utilisant le théorème de Picard. En effet, l'équation (2) implique qu'une fonction X de classe $\mathcal{C}^1$ est solution de (1) si et seulement si elle est point fixe de Φ.

On va montrer que Φ admet une itérée contractante. Soit $Y, Z \in \mathcal{F}$, montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \quad \|\Phi^p(Y)(t) - \Phi^p(Z)(t)\| \leq \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty.$$

Cette inégalité est vraie pour $p = 0$ et

$$\begin{aligned}
\|\Phi^{p+1}(Y)(t) - \Phi^{p+1}(Z)(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(u, \Phi^p(Y)(u)) - f(u, \Phi^p(Z)(u))\| \,\mathrm{d}u \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} k \|\Phi^p(Y)(u) - \Phi^p(Z)(u)\| \,\mathrm{d}u \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} k \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty \,\mathrm{d}u \right| \\
&= \frac{k^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|Y - Z\|_\infty,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tous $Y, Z \in \mathcal{F}$,

$$\|\Phi(Y) - \Phi(Z)\|_\infty \leq \frac{k^p T^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty.$$

Or $\frac{k^p T^p}{p!} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^p T^p}{p!} < 1$. D'après le théorème de point fixe de Picard, Φ admet un unique point fixe X sur $\mathcal{F}$, qui est donc l'unique solution de (1) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Cette solution se prolonge en une solution maximale. Supposons qu'il existe deux tels prolongements X_1 et X_2 sur deux intervalles I_1 et I_2. L'intervalle $I_1 \cap I_2$ est non vide car il contient $[t_0 - T, t_0 + T]$. Soit J le plus grand intervalle inclus dans $I_1 \cap I_2$ et contenant $[t_0 - T, t_0 + T]$ tel que $X_1 = X_2$ sur J. Alors J est fermé dans $I_1 \cap I_2$ car $X_1 - X_2$ est continue. Si $J \neq I_1 \cap I_2$, alors on peut appliquer l'unicité locale précédemment démontrée en l'une des bornes de J et contredire la maximalité de J. Donc $J = I_1 \cap I_2$, d'où on déduit $X_1 = X_2$ sur $I_1 \cap I_2$ et, par définition de solution maximale, $I_1 = I_2$. Finalement, X se prolonge en une unique solution maximale. $\square$