

## 206 – Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

2013 – 2014

### Question.

Pourquoi l'enveloppe convexe d'un compact est compacte ?

### Réponse.

Soit  $C$  un compact d'un espace vectoriel de dimension  $n$ , alors

$$\text{Conv}(C) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, x_i \in C \right\}$$

par le théorème de Carathéodory. Alors si on pose

$$\Delta_{n+1} := \left\{ (\lambda_i) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\},$$

$\Delta_n$  est compact et l'application

$$\begin{aligned} f : \Delta_{n+1} \times C^{n+1} &\longrightarrow \text{Conv}(C) \\ ((\lambda_i), (x_i)) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{aligned}$$

est continue et surjective, d'où le résultat.

### Question.

Montrer la convergence des itérées dans le théorème de point fixe dans le cas d'une application strictement 1-lipschitzienne sur un compact.

## Réponse.

On montre d'abord que  $f$  admet un unique point fixe : l'application  $x \mapsto d(x, f(x))$  est continue sur un compact donc admet un minimum  $m$  atteint en  $a$ . Si  $m > 0$ , alors  $f(a) \neq a$  et

$$d(f(a), f^2(a)) < d(a, f(a)) = m,$$

ce qui contredit la minimalité de  $m$ . Donc  $m = 0$  et  $f(a) = a$ . De plus, ce point fixe est unique car si  $b = f(b)$  avec  $a \neq b$ , on a

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) < d(a, b).$$

On considère maintenant la suite  $u_n := d(f^n(x_0), a)$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive et décroissante :

$$u_{n+1} = d(f^{n+1}(x_0), a) = d(f^{n+1}(x_0), f(a)) < d(f^n(x_0), a).$$

On considère l'ensemble

$$X := \{(x, y) \mid d(x, y) \geq \varepsilon\},$$

$X$  est compact.  $(x, y) \mapsto \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)}$  est continue sur  $X$  donc admet un maximum sur  $X$ , qui est inférieur strictement à 1. Donc  $f$  est contractante sur  $X$  et, en appliquant le théorème de Picard, si  $(f^n(x_0), a) \in X$  pour tout  $n$ , alors  $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a$  l'unique point fixe de  $f$ , ce qui est absurde. Donc il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $d(f^n(x_0), a) < \varepsilon$ , et donc pour  $m > n$ ,  $d(f^m(x_0), a) < d(f^n(x_0), a) < \varepsilon$ . Ceci prouve la convergence de la suite  $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $a$ .

## Question.

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  croissante. Montrer que  $f$  admet un point fixe.

## Réponse.

On considère l'ensemble  $I := \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$ . Alors  $I \neq \emptyset$  car  $1 \in I$ .

$I$  est borné donc admet une borne inférieure  $a$ . Pour  $x \in I$ , on a alors  $x \geq a$  et donc  $f(x) \geq f(a)$  car  $f$  est croissante, d'où  $x \geq f(a)$  pour tout  $x \in I$ . On en déduit que  $f(a)$  est un minorant de  $I$ , donc  $f(a) \leq a$ . On en déduit  $f^2(a) \leq f(a)$  et donc que  $f(a) \in I$ , d'où  $a \leq f(a)$  par définition de  $a$ .

Donc  $a = f(a)$  est un point fixe de  $f$ .

## Question.

Montrer le théorème de Cauchy-Peano en utilisant le théorème de Schauder.

## Réponse.

Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, x_0) \in I \times U$  et  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Le but est de montrer que (1) admet une solution locale.

On commence par remarquer que (1) est équivalent à

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds$$

car  $f$  est continue.

On va se placer sur un cylindre de sécurité : soit  $r, M > 0$  tels que

$$\bar{B}(x_0, r) \subset U, \quad J := \left[ t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M} \right] \subset I \quad \text{et} \quad \sup_{(t,x) \in J \times B(x_0, r)} \|f(t, x)\| \leq M.$$

On note

$$\mathcal{A} := \{x : J \rightarrow \bar{B}(x_0, r) \text{ } M\text{-lipschitzienne telle que } x(t_0) = x_0\}$$

et on définit l'opérateur  $T$  sur  $\mathcal{A}$  par

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Le but est donc de montrer que  $T$  admet un point fixe. On commence par montrer que  $T$  est bien défini : pour  $x \in \mathcal{A}$  et  $t \in J$ , on a

$$\|T(x)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq M|t - t_0| < r$$

et pour  $t_1, t_2 \in J$ ,

$$\|T(x)(t_2) - T(x)(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s)) ds \right\| \leq M|t_2 - t_1|,$$

donc  $T$  est bien défini.

$\mathcal{A}$  est bien convexe, fermé et on montre par le théorème d'Ascoli que  $\mathcal{A}$  est compact. En effet, pour  $t \in J$ ,  $\{x(t) \mid x \in \mathcal{A}\} \subset \bar{B}(x_0, r)$  donc  $\mathcal{A}$  est ponctuellement bornée (on est en dimension finie) et pour  $x \in \mathcal{A}$ ,

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2|$$

donc  $\mathcal{A}$  est bien équicontinue.

Montrons que  $T$  est continu pour pouvoir appliquer le théorème de Schauder. Soit  $x, y \in \mathcal{A}$  et  $\varepsilon > 0$ , alors  $f$  est uniformément continue sur  $J \times \bar{B}(x_0, r)$  donc il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\|x - y\|_\infty < \eta \Rightarrow \|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\| < \varepsilon.$$

D'où, pour  $\|x - y\|_\infty < \eta$ ,

$$\|T(x)(t) - T(y)(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \, ds < \varepsilon \frac{M}{r},$$

donc  $T$  est continu.

Finalement,  $\mathcal{A}$  est un convexe fermé non vide,  $T$  est continu de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}$  est compact donc  $T(\mathcal{A})$  l'est aussi, on peut donc appliquer le théorème de Schauder qui donne l'existence d'un point fixe pour  $T$ .