

# Théorème de Jordan.

2013 – 2014

Références : Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

## Théorème.

Soit  $\Gamma = \text{Im}(\gamma)$  avec  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , 1-périodique, telle que  $\gamma|_{]0,1[}$  soit injective et  $\gamma'(t) \neq 0$ . Alors  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  a deux composantes connexes.

*Démonstration.* On commence par supposer pour plus de commodités que  $|\gamma'(t)| = 1$  pour tout  $t$  (une justification est donnée en fin de document), que  $\gamma(0) = 0$  et que  $\gamma'(0) = 1$ .

## Lemme.

Si pour  $\varepsilon > 0$  on note  $\Gamma_\varepsilon^+$  (resp.  $\Gamma_\varepsilon^-$ ) la courbe paramétrée par

$$\gamma_\varepsilon^+(t) = \gamma(t) + i\varepsilon\gamma'(t) \quad (\text{resp. } \gamma_\varepsilon^-(t) = \gamma(t) - i\varepsilon\gamma'(t))$$

alors il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon < \alpha$ ,  $\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^+ = \Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^- = \emptyset$ .

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $s, t$  tels que  $\gamma(t) = \gamma_\varepsilon^+(s)$  (on peut supposer  $|t - s| \leq 1$ ), alors

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - (\gamma(s) + (t - s)\gamma'(s))| &= |\gamma'(s)| |i\varepsilon - (t - s)| \\ &> |t - s|. \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\gamma'$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et périodique donc uniformément continue, donc il existe  $\eta > 0$  tel que

$$|t_1 - t_2| \leq \eta \implies |\gamma'(t_1) - \gamma'(t_2)| \leq 1.$$

Si  $|t - s| \leq \eta$ , alors en appliquant le théorème des accroissements finis à  $t \mapsto \gamma(t) - (\gamma(s) + (t - s)\gamma'(s))$  on a

$$|\gamma(t) - (\gamma(s) + (t - s)\gamma'(s))| \leq \sup_{t_1 \in [s, t]} |\gamma'(t_1) - \gamma'(s)| |t - s| \leq |t - s|.$$

Ceci est impossible donc  $|t - s| > \eta$ . Posons alors

$$\alpha := \inf_{1 \geq |t_1 - t_2| \geq \eta} |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|.$$

Alors  $\alpha$  est atteint par compacité de  $\{1 \geq |t_1 - t_2| \geq \eta\}$  et continuité de  $(t_1, t_2) \mapsto |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|$ , on en déduit que  $\alpha > 0$  par injectivité de  $\gamma$ .

Soit  $\varepsilon < \alpha$  et  $s, t$  tels que  $\gamma(t) = \gamma_\varepsilon^+(s)$ . Alors  $|t - s| > \eta$  et on a

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - \gamma_\varepsilon^+(s)| &= |\gamma(t) - (\gamma(s) + i\varepsilon\gamma'(s))| \\ &\geq |\gamma(t) - \gamma(s)| - |i\varepsilon\gamma'(s)| \\ &\geq \alpha - \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

On aboutit donc sur une contradiction, d'où  $\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^+ = \emptyset$ . De même,  $\Gamma \cap \Gamma_\varepsilon^- = \emptyset$ .  $\square$

Montrons que  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  possède au plus deux composantes connexes. Pour cela, posons  $\varepsilon < \alpha$  et montrons que tout point de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  peut être relié par un chemin à  $\Gamma_\varepsilon^+$  ou à  $\Gamma_\varepsilon^-$  sans couper  $\Gamma$ .

Soit donc  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ .

Par compacité de  $\Gamma$ , la distance de  $z$  à  $\Gamma$  est atteinte en un point  $\gamma(t_0)$  et on a  $z - \gamma(t_0) \perp \gamma'(t_0)$  (en dérivant  $t \mapsto |z - \gamma(t)|^2$ ).

Alors la demi-droite  $[\gamma(t_0), z)$  rencontre  $\Gamma_\varepsilon^+$  au point  $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$  ou  $\Gamma_\varepsilon^-$  au point  $\gamma_\varepsilon^-(t_0)$ . Supposons par exemple que nous soyons dans le premier cas et montrons que  $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$  ne rencontre pas  $\Gamma$ . Deux cas sont possibles :

- $\gamma(t_0), \gamma_\varepsilon^+(t_0)$  et  $z$  sont alignés dans cet ordre. Alors si  $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$  rencontrait  $\Gamma$ , cela contredirait la minimalité de  $|z - \gamma(t_0)|$ .
- $\gamma(t_0), z$  et  $\gamma_\varepsilon^+(t_0)$  sont alignés dans cet ordre. Alors si  $[\gamma_\varepsilon^+(t_0), z]$  rencontrait  $\Gamma$ , ce point serait également sur un  $\Gamma_{\varepsilon'}^+$  avec  $\varepsilon' \leq \varepsilon$ , ce qui contredirait le lemme.

Montrons maintenant que  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  a au moins deux composantes connexes. Pour cela, il suffit de trouver deux points de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  qui n'ont pas le même indice par rapport à  $\gamma$ . Choisissons  $i\varepsilon$  et  $-i\varepsilon$ .

$$\text{Ind}_\gamma(i\varepsilon) - \text{Ind}_\gamma(-i\varepsilon) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left( \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - i\varepsilon} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) + i\varepsilon} \right) dt = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t) + \varepsilon^2} dt.$$

Le dénominateur ne peut s'annuler que si  $t = 0$  et  $\varepsilon = 0$  car  $\pm i\varepsilon \notin \Gamma$ .

Par ailleurs,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma'(t)}{t} = \gamma'(0) = 1$  donc il existe  $\delta > 0$  tel que si  $|t| < \delta$ , alors  $\frac{\gamma^2(t)}{t^2} > \frac{1}{2}$ .

On a alors, par changement de variable  $t = \varepsilon s$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t) + \varepsilon^2} dt &= \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int_{-\delta/\varepsilon}^{\delta/\varepsilon} \frac{\gamma'(\varepsilon s)}{\gamma^2(\varepsilon s) + \varepsilon^2} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\varepsilon s)}{1 + \frac{\gamma^2(\varepsilon s)}{(\varepsilon s)^2} s^2} \mathbf{1}_{[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]}(s) ds. \end{aligned}$$

Or  $\delta$  a été choisi pour que l'intégrande soit inférieure à  $1/(1 + \frac{s^2}{2})$ . D'où, par théorème de convergence dominée,

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\varepsilon s)}{1 + \frac{\gamma^2(\varepsilon s)}{(\varepsilon s)^2} s^2} \mathbf{1}_{[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]}(s) ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{ds}{1 + s^2} = 1.$$

D'autre part, la fonction  $(\varepsilon, t) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t) + \varepsilon^2}$  est continue sur le compact  $[0, \frac{\alpha}{2}] \times \{1 \geq |t| \geq \delta\}$ , elle est donc majorée indépendamment de  $t$  et  $\varepsilon$  par une constante, d'où

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \frac{1}{2}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t) + \varepsilon^2} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Finalement, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\text{Ind}_\gamma(i\varepsilon) - \text{Ind}_\gamma(-i\varepsilon)) = 1.$$

Donc pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, les indices sont distincts.  $\square$

## Détails supplémentaires

Montrons que l'on peut se ramener au cas où  $|\gamma'(t)| = 1$  pour tout  $t$ , quitte à modifier la période de  $\gamma$ .

Soit

$$s(t) := \int_0^t |\gamma'(u)| du$$

l'abscisse curviligne de  $\gamma$ , qui est continue car  $\gamma$  est  $\mathcal{C}^1$ .  $\gamma'$  est continue et non nulle donc  $s$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Il s'agit donc d'une bijection et on peut considérer  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ s^{-1}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(t) &= (s^{-1})'(t) \gamma'(s^{-1}(t)) \\ &= \frac{1}{s'(s^{-1}(t))} \gamma'(s^{-1}(t)) \\ &= \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{|\gamma'(s^{-1}(t))|}. \end{aligned}$$

On a donc  $|\tilde{\gamma}'(t)| = 1$  pour tout  $t$ .

Soit  $T := s(1)$ , montrons que  $\tilde{\gamma}$  est  $T$ -périodique. Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$t + T = \int_0^{s^{-1}(t)} |\gamma'(u)| du + \int_0^1 |\gamma'(u)| du = \int_0^{s^{-1}(t)+1} |\gamma'(u)| du = s(s^{-1}(t) + 1)$$

car  $\gamma$  est périodique. D'où

$$\tilde{\gamma}(t + T) = \gamma \circ s^{-1}(s(s^{-1}(t) + 1)) = \gamma(s^{-1}(t) + 1) = \gamma(s^{-1}(t)) = \tilde{\gamma}(t).$$