Pseudo-réduction simultanée

2013 – 2014

Proposition.
Soient $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}), N \in S_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$^tCMC = I_n \text{ et } ^tCNC = D$$

où D *est une matrice diagonale réelle.*

Démonstration. $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\Phi : (X,Y) \mapsto {}^tXMY$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, donc il existe une base orthonormée pour Φ.
i.e. il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$^tPMP = I_n$$

Or ${}^tPNP \in S_n(\mathbb{R})$ donc, par le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$^tQ^tPNPQ = D$$

avec D une matrice diagonale réelle.
En posant $C = PQ$, on obtient ce qu'on voulait. □

Autre rédaction

$\Phi : (X,Y) \mapsto {}^tXMY$ est un produit scalaire et $\Psi : (X,Y) \mapsto {}^tXNY$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. Il existe donc un unique endomorphisme u sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n, \Psi(X,Y) = \Phi(X, u(Y))$. De plus, Ψ est symétrique donc u est auto-adjoint pour Φ. Il existe donc une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale pour Φ de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Si on note P la matrice de passage de la base canonique à $(e_1, \dots, e_n)$, on a,

pour $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) &= \Phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, u\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j\right)\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j e_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i \\
&= {}^tXDY
\end{aligned}$$

avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. D'où

$$ {}^tX\,{}^tPNPY = {}^tXDY$$

pour tout X, Y et donc ${}^tPNP = D$.
Par ailleurs,

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

et donc ${}^tX\,{}^tPMPY = {}^tXY$ pour tout X, Y, d'où ${}^tPMP = I_n$.