# Pseudo-réduction simultanée

2012-2013

**Proposition.**
*Soient* $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}), N \in S_n(\mathbb{R})$.
*Alors il existe* $C \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$^tCMC = I_n \text{ et } ^tCNC = D$$

*où* $D$ *est une matrice diagonale réelle.*

*Démonstration.* $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\Phi : (X, Y) \mapsto {}^tXMY$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, donc il existe une base orthonormée pour $\Phi$.
*i.e.* il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$^tPMP = I_n$$

Or $^tPNP \in S_n(\mathbb{R})$ donc, par le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$^tQ^tPNPQ = D$$

avec $D$ une matrice diagonale réelle.
En posant $C = PQ$, on obtient ce qu'on voulait. $\square$