Lemme de Baire

2013-2014

Référence : Xavier Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994, p.392.

Lemme.
Soit (E, d) un espace métrique complet.
Alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

Démonstration. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E.
Soit V un ouvert non vide de E, montrons que $V \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n) \neq \varnothing$.
U_0 étant un ouvert dense, $U_0 \cap V$ est un ouvert non vide donc il existe $r_0 \leq 1$ et $x_0 \in E$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset U_0 \cap V$.
Puis U_1 est un ouvert dense donc $U_1 \cap B(x_0, r_0)$ est un ouvert non vide, donc il existe $r_1 \leq \frac{1}{2}$ et $x_1 \in E$ tels que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset U_1 \cap B(x_0, r_0)$.
On construit ainsi par récurrence une suite $(B(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$r_n \leq \frac{1}{n} \text{ et } \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$$

Soit $n, m \geq k$, alors $x_n, x_m \in B(x_k, r_k)$ donc $d(x_n, x_m) \leq \frac{2}{k}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, donc converge vers un élément x car E est complet.
De plus, pour tout $n, m \geq n, x_m \in B(x_n, r_n)$ donc $d(x_m, x_n) \leq r_n$. En faisant $m \to \infty$, on obtient $d(x, x_n) \leq r_n$, *i.e.* $x \in \overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$.
D'où :

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

□