$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

2012-2013

Référence : Hervé Queffélec, Claude Zuily, *Analyse pour l'agrégation (3e édition)*, Dunod, 2006, p.329.

Proposition.
$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-itx}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^q e^{-itx} f(x) \right| = |x|^q |f(x)| \in L^1$$

car f est $\mathcal{C}^\infty$ et pour $|x| \geq 1$,

$$|x|^q |f(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}$$

Donc, pour $q \in \mathbb{N}$,

$$\hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} (-ix)^q f(x) \mathrm{d}x$$

Montrons par récurrence sur p que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, il existe $g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que :

$$t^p \hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g_{p,q}(x) \mathrm{d}x$$

C'est vrai pour $p = 0$ car $x^q f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
On suppose que c'est vrai à l'ordre p, alors par IPP :

$$t^p \hat{f}^{(q)}(t) = -\frac{1}{it} \left[e^{-itx} g_{p,q}(x) \right]_{\mathbb{R}} + \frac{1}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g'_{p,q}(x) \mathrm{d}x$$

$g_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g_{p,q}(x) = 0$.
On pose $g_{p+1,q} = \frac{1}{i} g'_{p,q} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors :

$$t^{p+1} \hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g_{p+1,q}(x) \mathrm{d}x$$

D'où :

$$\left|t^p \hat{f}^{(q)}(t)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |g_{p,q}(x)| \mathrm{d}x = C_{p,q} < \infty$$

car $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.
Donc $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\square$