Racine carrée d'une matrice symétrique positive

2012-2013

Proposition.
Soit $H \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Alors il existe une unique matrice $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ *telle que* $H = R^2$.

Démonstration.

- Existence : H est symétrique réelle donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

  $$^tPHP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

  avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$.
  On pose $S := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, on a $S^2 = D$.
  Alors $R := PS^tP \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $R^2 = H$.

- Unicité : Soit $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = H$.
  Soient r et h les endomorphismes associés dans la base canonique, h est autoadjoint et $Sp(h) \subset \mathbb{R}_+$.
  On note E_{λ_i} les sous-espaces propres correspondants à h, alors r commute avec h car $r^2 = h$, donc E_{λ_i} est stable par r.
  On note $r_i = r_{|E_{\lambda_i}}$, on a $r_i^2 = \lambda_i \mathrm{id}_{E_{\lambda_i}}$.
  Donc si $\mu \in Sp(r_i), \mu^2 = \lambda_i$, donc $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ (car r_i est autoadjoint positif).
  r_i n'a qu'une seule valeur propre et est diagonalisable, donc $r_i = \sqrt{\lambda_i}\mathrm{id}_{E_{\lambda_i}}$.

$\square$