

Théorème d'échantillonnage de Shannon

2012-2013

Référence : Michel Willem, *Analyse harmonique réelle*, Hermann, 1995, p.126-128.

On définit, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-2i\pi xy} dx$$

la transformée de Fourier de u . Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on peut prolonger la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$.

On définit :

$$BL^2 := \{u \in L^2(\mathbb{R}) / \text{supp } \hat{u} \subseteq \mathbb{I}\} \text{ où } \mathbb{I} := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

On définit aussi le sinus-cardinal sur \mathbb{R} par :

$$\text{sinc } x := \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème.

BL^2 vérifie les propriétés suivantes :

- (i) BL^2 est un espace de Hilbert.
- (ii) Tout $u \in BL^2$ possède un représentant dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (i.e. u est presque partout égale à une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).
- (iii) La suite $(\text{sinc}(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2 .
- (iv) Pour $u \in BL^2$,

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \text{sinc}(k - x),$$

la série convergeant uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Lemme.

Si $u \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{u} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et :

$$\|\hat{u}\|_{\infty} \leq \|u\|_1$$

Démonstration. Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\hat{u}(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx = \|u\|_1$$

donc $\|\hat{u}\|_{\infty} \leq \|u\|_1$.

Par densité de $\mathcal{D} := \{u \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) / \text{supp } u \text{ est compact}\}$ dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe une suite (u_n) de \mathcal{D} convergeant vers u dans $L^1(\mathbb{R})$. On a donc :

$$\|\hat{u} - \widehat{u_n}\|_{\infty} \leq \|u - u_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

De plus, $u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc $\widehat{u_n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Or $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ donc $\hat{u} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. \square

Démonstration du théorème.

- (i) Pour montrer que BL^2 est complet, il suffit de prouver que c'est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de BL^2 convergeant vers u dans $L^2(\mathbb{R})$.

Par continuité de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$, $(\widehat{u_n})_n$ converge vers \hat{u} dans $L^2(\mathbb{R})$, donc en particulier dans $L^2(\Omega)$ où $\Omega := \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$.

Par définition de BL^2 , $\widehat{u_n}|_{\Omega} = 0$, donc $\hat{u}|_{\Omega} = 0$ et $u \in BL^2$.

- (ii) Soit $u \in BL^2$. Par définition, $\hat{u} \in L^2(\mathbb{I})$ donc $\hat{u} \in L^1(\mathbb{I})$ (\mathbb{I} de mesure finie). $\hat{u} = 0$ en dehors de \mathbb{I} donc $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$.

Par inversion de Fourier, on a alors :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y) e^{2i\pi xy} dy && \text{p.p.} \\ &= \int_{\mathbb{I}} \hat{u}(y) e^{2i\pi xy} dy && \text{p.p.} \end{aligned}$$

Par le lemme, u a un représentant dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

On déduit aussi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'égalité de Plancherel que, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|u(x)| \leq \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{I})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

donc

$$\|u\|_{\infty} \leq \|u\|_2$$

- (iii) Posons

$$e_k(x) := \begin{cases} e^{2i\pi kx} & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que $\widehat{e}_k(y) = \text{sinc}(y - k)$.

D'où, par conservation du produit scalaire,

$$\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}(x - j) \text{sinc}(x - k) dx = \int_{\mathbb{R}} e_j \overline{e_k} = \int_{\mathbb{I}} e_j \overline{e_k} = \delta_{j,k}$$

La suite $(\text{sinc}(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est donc orthonormée.

Pour montrer que cette suite est une base hilbertienne de BL^2 , il suffit désormais de montrer qu'elle est totale, donc de montrer que son orthogonal dans BL^2 est réduit à $\{0\}$.

Soit donc $u \in BL^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \text{sinc}(x - k) dx = 0$$

On a alors :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} u \widehat{e}_k = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u} e_k = \int_{\mathbb{I}} \widehat{u} e_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Donc $\widehat{u}(y) = 0$ presque partout sur \mathbb{I} car $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, $\widehat{u} = 0$ donc $u = 0$ et $(\text{sinc}(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale.

(iv) Par (iii), on a, pour $u \in BL^2$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, \text{sinc}(\cdot - k) \rangle \text{sinc}(x - k)$$

la convergence étant uniforme par l'inégalité prouvée à la fin de (ii).

En particulier, pour $x = j \in \mathbb{Z}$, on a

$$u(j) = \langle u, \text{sinc}(\cdot - j) \rangle$$

D'où le résultat recherché.

□