Partitions d'un entier en parts fixées

2012-2013

Référence : Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, *Oraux X - ENS, Analyse 2 (2e édition)*, Cassini, 2009, p.194.

Théorème.
Soit $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble.
Pour $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = Card\left\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k = n\right\}$$

Alors :

$$u_n \sim \frac{1}{a_1 \cdots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Démonstration. On pose :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

Les séries $\displaystyle\sum_{x_i \in \mathbb{N}} z^{x_i a_i}$ ont pour rayon de convergence 1 et le coefficient de z^n dans le produit de Cauchy des ces k séries entières est :

$$\sum_{\substack{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \\ a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k = n}} 1 = u_n$$

D'où, pour $|z| < 1$:

$$f(z) = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_i=0}^{+\infty} z^{x_i a_i} \right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - z^{a_i}}$$

La fonction f est donc une fraction rationnelle de pôles les racines a_i-ièmes de l'unité. Le pôle 1 est de multiplicité k et tous les autres sont de multiplicité strictement inférieure à k. En effet, d'après le théorème de Bezout, il existe $u_1, \ldots, u_k$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 1$.

Alors si ω est tel que $\omega^{a_1} = \ldots = \omega^{a_k} = 1$, on a :

$$\omega = \omega^{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i} = \prod_{i=1}^{k} (\omega^{a_i})^{u_i} = 1$$

On note $P = \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$ l'ensemble des pôles de f avec $\omega_1 = 1$. Alors par décomposition de f en éléments simples, il existe, pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq k-1$, $c_{ij} \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que, pour $|z| < 1$, on ait :

$$f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^k} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} \frac{c_{ij}}{(\omega_i - z)^j}$$

Or la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{(\omega - z)^j}$ est développable en série entière de rayon de convergence 1. Ses coefficients s'obtiennent en dérivant $j-1$ fois le développement en série entière de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{\omega - z}$.
On a, pour $|z| < 1$,

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\omega^{n+1}}$$

D'où :

$$\frac{(j-1)!}{(\omega - z)^j} = \sum_{n=j-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-j+1)!} \frac{z^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}$$

i.e.

$$\frac{1}{(\omega - z)^j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{z^n}{\omega^{n+j}}$$

On en déduit :

$$u_n = \alpha \binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} c_{ij} \binom{n+j-1}{n} \omega^{-n-j}$$

Le premier terme est équivalent à $\alpha \dfrac{n^{k-1}}{(k-1)!}$ et les autres termes sont négligeables devant n^{k-1}, d'où :

$$u_n \sim \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Il ne reste plus qu'à calculer α. Pour cela, on multiplie $f(z)$ par $(1-z)^k$ et on évalue en 1 :

$$(1-z)^k f(z) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-z}{1-z^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 + z + \cdots + z^{a_i - 1}}$$

D'où :

$$\alpha = \frac{1}{a_i \cdots a_k}$$

et on obtient bien le résultat voulu. $\square$