Critère de Weyl

Florian BOUGUET

Définition 1 (***Suite équirépartie***)

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$.
Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, notons $N_n(a,b) = \sharp\{k \in [\![0,1]\!] / x_k \in [a,b]\}$.
On dit que (x_n) est équirépartie si $\frac{1}{n}N_n(a,b) \to b-a$.

Proposition 1 (***Critère de Weyl***)

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$.
On a équivalence entre

1. *(x_n) équirépartie.*
2. *$\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ 1-périodique,*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f$$
3. *$\forall p \in \mathbb{Z}$,*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p x_k} = 0$$

Démonstration :

Commençons par remarquer que, $\forall a \leq b$,

$$\frac{1}{n}N_n(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[a,b]}(x_k) \to \int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b]} = b-a$$

Montrer qu'une suite est équirépartie est équivalent à montrer 2) ou 3), non pas pour des fonctions continues périodiques ou des exponentielles, mais pour des indicatrices. La démonstration se ramène donc à approcher ou encadrer des fonctions par des fonctions d'un autre type, pour passer d'un cas à l'autre.

1) $\Rightarrow$ 2) :
Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, étagée. φ est combinaison linéaire (finie !) d'indicatrices donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) = \int_0^1 \varphi$$

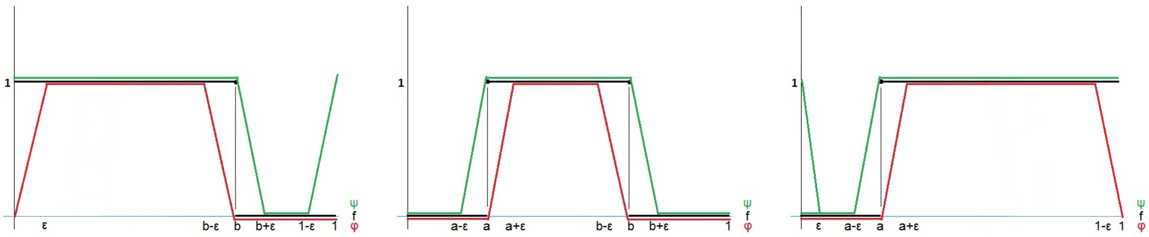
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ 1-périodique, soit $\varepsilon > 0$.

Il existe φ étagée telle que $\|f-\varphi\|_\infty < \varepsilon$.
$\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k) - \int_0^1 \varphi\right| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_0^1 f\right| &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)-\varphi(x_k)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k) - \int_0^1\varphi\right| + \left|\int_0^1 \varphi - f\right| \\ &\leq \frac{1}{n}n\varepsilon + \varepsilon + \int_0^1 \varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

Donc 2).

2) $\Rightarrow$ 1) :
Soient $0 \leq a \leq b \leq 1$, soit $\varepsilon > 0$. On se trouve dans l'un des trois cas suivants, et l'on peut encadrer $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ de la manière suivante :



On a $\varphi \leq f \leq \psi$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k)$$

On a $\int_0^1 \varphi = 1 - a - \varepsilon$ donc

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq 1 - a - \varepsilon$$

On a également $\int_0^1 \psi = 1 - a + \varepsilon$ donc

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq 1 - a + \varepsilon$$

Ces égalités étant vérifiées pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit 1).

2) $\Rightarrow$ 3) :
Soit $p \in \mathbb{Z}$. Le cas $p = 0$ est évident, supposons $p \neq 0$.
2) étant vraie pour toute fonction continue périodique, elle est vérifiée pour $x \mapsto \cos(2i\pi px)$ et $x \mapsto \sin(2i\pi px)$. En écrivant

$$\mathrm{e}^{2i\pi px} = \cos(2i\pi px) + i\sin(2i\pi px)$$

on obtient immédiatement 3).

3) $\Rightarrow$ 2) :
3) étant vérifiée, on déduit que la relation $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) = \int_0^1 \varphi$ est vraie pour tout polynôme trigonométrique (par combinaison linéaire).

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ 1-périodique, soit $\varepsilon > 0$.

Par le théorème de Weierstrass trigonométrique, il existe φ polynôme trigonométrique tel que $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$.

On peut alors reprendre mot pour mot la démonstration du cas 1) $\Rightarrow$ 2).

Remarque

On peut aussi montrer que 2) reste vraie dans le cas des fonctions continues (pas forcément périodiques). On peut en effet encadrer une fonction continue par deux fonctions continues périodiques, quasiment de la même manière que dans le cas 2) $\Rightarrow$ 1). Cela peut constituer un bon complément pour finir le développement, sinon il s'agira probablement d'une question de la part du jury.