Théorie des jeux : Détermination des boréliens

Antoine DEQUAY
Stage à l'IMJ-PRG
Supervisé par Anatole KHÉLIF

20 mai 2019 - 16 juin 2019

Résumé

Nous allons nous intéresser ici à une branche de la théorie des jeux, les jeux de Gale-Stewart. Plus particulièrement, nous nous intéresserons à leur détermination. Après quelques rappels sur la théorie des ensembles, nous introduirons les différents concepts utilisés dans la branche de la théorie des jeux qui nous intéresse. Nous verrons alors que la propriété de détermination n'est pas une évidence, puis par le théorème de Gale-Stewart, que tout jeu ouvert ou fermé est déterminé. Nous nous attacherons ensuite à la démonstration du théorème de Martin, qui généralise le théorème de Gale-Stewart aux boréliens. Enfin, nous interpréterons nos résultats et nous en déduirons une conséquence : l'existence de la Hiérarchie de Wadge.

Remerciements

Je tiens à remercier Anatole KHELIF, mon maître de stage, pour sa gentillesse, sa patience et son regard sur mon travail tout au long de mon stage, ainsi qu'en amont de cette période. Merci également de m'avoir offert la possibilité d'accéder au séminaire CLE[1].

Enfin, j'aimerais remercier ma très chère maman, ainsi que Vincent Louatron pour leur relecture attentive de ce rapport.

1. Catégories, Logiques, Etc... Voir `https://sites.google.com/site/logiquecategorique/`

Table des matières

Chapitre 1

Quelques rappels sur la théorie des ensembles

1.1 Les axiomes de base : ZFC

Pour bien appréhender ce qui va suivre, commençons par une contextualisation et quelques rappels sur la théorie des ensembles de base. Ce premier chapitre n'a cependant pas pour prétention de redémontrer à partir de l'axiomatique de base toutes les mathématiques utiles à la compréhension de ce rapport. Seuls quelques points seront abordés, et les preuves, si elles sont données, seront partielles. On pourra consulter [JEC03], pour une construction et des preuves formelles.

La théorie de Zermelo et Fraenkel

Dans ce rapport, nous utilisons les axiomes de la théorie des ensembles développée par Zermelo, Fraenkel et Solen (ZF), c'est à dire les axiomes d'extensionalité, de la paire, du schéma de séparation, de la réunion, de l'ensemble des parties, de l'infini, du schéma de remplacement et de régularité.

L'axiome du choix

Rajoutons à présent l'axiome du choix à ZF pour nous baser sur le fameux ZFC. Notons dès à présent que l'axiome du choix nous sera indispensable dans la suite (mais pas forcément sous sa forme la plus forte), aussi bien pour la preuve d'existence d'un jeu indéterminé que pour la preuve de détermination des boréliens.

1.2 Les ordinaux

Définitions

Définition 1.2.1 *Ensemble bien ordonné.* Un ensemble bien ordonné est un ensemble muni d'une relation binaire réflexive, antisymétrique, transitive (relation d'ordre), linéaire (totale) et bien fondée : l'ensemble ne contient pas une suite infinie d'éléments qui soit strictement décroissante.

Définition 1.2.2 *Les ordinaux.* On dit qu'un ensemble est un ordinal s'il est transitif (i.e. tout ses éléments sont aussi des parties de lui-même) et bien ordonné par $\in$. La collection des ordinaux sera désignée Ord par la suite. On notera indifféremment $\alpha < \beta$ ou $\alpha \in \beta$, avec α et β des ordinaux.

On définit le successeur d'un ordinal n comme : $n^+ := (n \cup \{n\})$. C'est aussi un ordinal.

Définition 1.2.3 *Les ordinaux limites.* Un ordinal limite est un ordinal non nul et non successeur.

On définit ω comme le plus petit ordinal limite, et on nommera ordinaux finis ou entiers naturels les ordinaux plus petits que ω, ce sont les ordinaux de la forme :

— $0 := \emptyset < \omega$,

— $n + 1 := n^+ := (n \cup \{n\}) < \omega$ avec $n < \omega$.

On définit également $\omega_1 := \omega^+$.

Par exemple, on a :

$$3 := 2^+ = 2 \cup \{2\} = 1 \cup \{1, 2\} = \{0, 1, 2\}.$$

Une preuve pratique : l'induction

Commençons par le principe simplifié :

Définition 1.2.4 *Principe de récurrence sur ω.* Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de $n < \omega$. Si on suppose :

— $\mathcal{P}(0)$,

— $\forall n < \omega, \mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n + 1)$.

Alors $\forall n < \omega, \mathcal{P}(n)$.

On peut étendre ce principe de ω à Ord :

Définition 1.2.5 *Principe de récurrence transfinie.* Soit $\mathcal{P}(\alpha)$ une propriété dépendant de α un ordinal. Si on suppose :

$$(\forall \beta < \alpha, \mathcal{P}(\beta)) \Longrightarrow \mathcal{P}(\alpha).$$

Alors $\mathcal{P}(\alpha)$ pour tous les ordinaux.

Un lemme utile

Lemme 1.2.1 Soit X un ensemble. Alors il est en bijection avec un unique ordinal α.

Ce lemme est utile, car il permet d'indexer tout ensemble X par des ordinaux. En particulier, on se rappellera pour la suite que :
Pour tout ensemble X, il existe un ensemble J bien ordonné vérifiant les conditions :

— $|J| = |X|$,
— Pour tout $\beta \in J$, on a $|\{\alpha \in J, \alpha < \beta\}| < |J|$.

Preuve. Tout d'abord, rappelons que tout ensemble X non vide peut être bien ordonné (le cas vide correspond à l'ordinal 0). C'est le théorème du bon ordre de Zermelo, reposant sur la création par induction transfinie d'une suite transfinie (c'est à dire une suite indexée par les ordinaux) par l'axiome du choix, via l'utilisation d'une fonction choix f sur les sous-ensembles non vides de X (la suite est de terme général $a_\beta = f\left(X \setminus \{a_\alpha, \alpha < \beta\}\right)$).

L'existence de α vient du fait qu'il peut être défini comme la borne supérieure de l'ensemble d'ordinaux servant à indexer la suite transfinie.

L'unicité provient du fait qu'il n'existe pas de bijection entre deux ordinaux distincts. □

Remarque Si de plus X est bien ordonné, alors il existe une bijection de X vers α qui conserve l'ordre.

Définition 1.2.6 *Ensembles de Borel.* On définit par induction, pour X un espace topologique et $1 < \alpha < \omega_1$:

— $\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$ la collection des ouverts de X,
— $\mathbf{\Pi}^0_1(X)$ la collection des fermés de X,
— $\mathbf{\Delta}^0_1(X) := \mathbf{\Sigma}^0_1(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_1(X)$,
— $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ la collection des ensembles $A = \bigcup\limits_{n<\omega} A_n$ où $\forall n < \omega, \exists \beta < \alpha, A_n \in \mathbf{\Pi}^0_\beta(X)$,
— $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ la collection des ensembles $A = \bigcap\limits_{n<\omega} A_n$ où $\forall n < \omega, \exists \beta < \alpha, A_n \in \mathbf{\Pi}^0_\beta(X)$.
C'est également la collection des complémentaires des éléments de $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$,

— $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) := \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$,

Quand le contexte sera clair, on omettra le (X).

On a alors accès, avec ces définitions, à plusieurs résultats :

Proposition 1.2.1

— Pour $\alpha < \omega_1$, par induction, les éléments de $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ et $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ sont des boréliens.

— Toutes les collections considérées sont stables par pré-image continue.

— Il est facile de voir que $\mathbf{\Sigma}^0_1(X) \subset \mathbf{\Sigma}^0_2(X)$, et il vient, pour $\alpha < \beta$:

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \subset \mathbf{\Sigma}^0_\beta(X), \quad \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \subset \mathbf{\Pi}^0_\beta(X), \quad \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) \subset \mathbf{\Pi}^0_\beta(X), \quad \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) \subset \mathbf{\Sigma}^0_\beta(X).$$

D'où :

$$\bigcup_{\alpha<\omega} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha<\omega} \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X).$$

— L'axiome du choix dénombrable permet alors d'affirmer : tout borélien de X est élément d'un certain $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$.

Définition 1.2.7 *Hiérarchie de Borel.* Les collections $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ et $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ sont respectivement appelées classes additives, multiplicatives et ambiguëes. La famille ordonnée par l'inclusion formée par la totalité de ces collections (pour $\alpha < \omega_1$) est appelée *Hiérarchie de Borel.*

1.3 Quelques notations supplémentaires

Notations

— Si on a $p < q < \omega$ et $\{f_i\}_{p \leq i \leq q}$ une suite de fonctions composables (c'est à dire telles que ce qui suit a un sens), alors on note : $\prod_{i=p}^{q} f_i := f_p \circ f_{p+1} \circ ... \circ f_{q-1} \circ f_q$.

— Pour $n < \omega$, X^n représentera l'ensemble des suites à n éléments à valeur dans X, et pour $s \in X^n$, $|s| = n$ désignera la longueur de s.

— Pour $n < \omega$ et $s \in X^n$, on notera $s = \langle s_i \rangle_{i<n}$, où les s_i sont à valeur dans X. La suite vide sera notée $\langle\rangle \in X^0$. Par convention, si $l = 0$, $\langle x_i \rangle_{i<l}$ désignera la suite vide.

— On notera X^ω l'ensemble des suites infinies à valeur dans X. L'ensemble des suites finies à valeur dans X sera noté :

$$X^{<\omega} := \bigcup_{n<\omega} X^n.$$

- Pour $s \in X^\omega$, on notera $s = \langle s_i \rangle_{i<\omega}$, et pour tout $n < \omega$, $s|n := \langle s_i \rangle_{i \leq n}$. De même si $s \in X^{<\omega}$ et $n \leq |s|$.
- Soient $(s,t) \in (X^{<\omega})^2$. On définit, de manière naturelle, la concaténation :

$$s^\frown t \in X^{<\omega} \text{ avec } \left(s^\frown t\right)_i := \begin{cases} s_i & \text{pour} \quad i < |s| \\ t_{i-|s|} & \text{pour} \quad |s| \leq i < |t| \end{cases}$$

  On étend cette définition à $(s,t) \in X^{<\omega} \times X^\omega$ (alors $s^\frown t \in X^\omega$). Dans la suite, on omettra parfois le symbole « $^\frown$ ».
- Dans un jeu, on désigne par coup l'action d'une joueuse, et par tour un mouvement de chacune des deux joueuses.

Chapitre 2

Les jeux infinis

2.1 Définitions

Dans toute la suite, Y désignera un ensemble à plus de deux éléments.

Définition 2.1.1 *Arbre sur Y.* Une partie X de $Y^{<\omega}$ est appelée arbre sur Y si :

— $\emptyset \in X$,

— $\forall (n,m) \in \omega^2, m < n, \langle x_j \rangle_{j \leq n} \in X \Longrightarrow \langle x_j \rangle_{j \leq m} \in X$ (X est transitif),

— $\forall n \in \omega,\ \langle x_j \rangle_{j \leq n} \in X \Longrightarrow \exists x \in Y,\ \langle x_j \rangle_{j \leq n} {}^\frown x \in X$.

L'appellation arbre se comprend alors ; les nœuds étant étiquetés par des éléments de Y, la racine par $\emptyset$, et les suites étant les chemins depuis la racine vers un nœud.

Soit $n < \omega$ et X un arbre. On définit $X|\,n := \{x \in X, |x| \leq n\}$.

On définit également, toujours pour $n < \omega$, si $\langle x_j \rangle_{j \leq n} \in X$:

$X_{\langle x_j \rangle_{j \leq n}} := \{y \in X,\ y|n = \langle x_j \rangle_{j \leq n}\}$.

La dénomination d'arbre n'a pas été utilisée par Gale et Stewart ou Martin, mais on la retrouve chez Grigorieff [GRI77] et Fournier [FOU09].

Dans toute la suite, X désignera un arbre sur Y.

Définition 2.1.2 *L'application $\mathcal{F}$.* On définit $\mathcal{F}(X)$ comme l'ensemble des suites infinies à valeurs dans Y, telles que chacun de leurs segments initiaux soient dans X.

Pour $A \subseteq Y^\omega$, on définit, pour $n < \omega$ et $\langle x_j \rangle_{j \leq n} \in X$,
$A_{\langle x_j \rangle_{j \leq n}} := \{x \in A, x|n = \langle x_j \rangle_{j \leq n}\}$.

Il est clair qu'on peut définir la réciproque de $\mathcal{F}$ ainsi : pour $A \subseteq Y^\omega$, on a :

$$\mathcal{F}^{-1}(A) := \left\{u \in Y^{<\omega}, \exists y \in Y^\omega, u^\frown y \in A\right\}.$$

Dans toute la suite, A désignera un sous-ensemble de $\mathcal{F}(X)$ et I et II désigneront deux "joueuses".

Définition 2.1.3 *Jeu infini à deux joueurs à information parfaite (dit de Gale-Stewart).* On définit $\mathcal{G}_X(A)$ un jeu sur X, dont les règles sont les suivantes :

— L'une après l'autre, I et II choisissent un élément de Y. I commence.

— A chaque choix i, on note $x_i \in Y$ l'élément choisit. On doit avoir :
$\forall i < \omega, \langle x_j \rangle_{j<i} \in X$.

— A la limite, un jeu infini "a été joué", ce qui ressemble à :

$$\begin{tikzcd}
\text{I :} & & x_0 \arrow[dr] & & x_2 \arrow[dr] & & x_4 \arrow[dr] & \\
(\mathcal{G}_X(A)) & & & & & & & \\
\text{II :} & \emptyset \arrow[uur] & & x_1 \arrow[uur] & & x_3 \arrow[uur] & & \dots
\end{tikzcd}$$

On note alors $x := \langle x_i \rangle_{i<\omega}$ la suite définie.

— I gagne le jeux $\mathcal{G}_X(A)$ si $x \in A$, et II gagne $\mathcal{G}_X(A)$ si $x \notin A$.

Remarque La notion d'arbre permet d'imposer des règles tout en gardant la possibilité de jouer le jeu à la limite.

Comme tout un chacun, I et II ne vont pas jouer au hasard. Formalisons donc le terme de *stratégie* :

Définition 2.1.4 *Stratégie.* Soit $\mathcal{G}_X(A)$ un jeu. On appelle stratégie :

— pour I une fonction $\sigma : \{s \in X, |s| \text{ pair}\} \longrightarrow Y$ tel que $\forall s \in X, |s|$ pair, $s^\frown\sigma(s) \in X$.

— pour II une fonction $\tau : \{s \in X, |s| \text{ impair}\} \longrightarrow Y$ tel que $\forall s \in X, |s|$ impair, $s^\frown\tau(s) \in X$.

Remarque La définition est bien licite, car X est un arbre ! (voir le troisième point de la définition).

Définition 2.1.5 *Jouer selon une stratégie.* On dira donc que :

— I joue selon la stratégie σ si, pour tout $y \in Y^\omega$, si II joue y en réponse à I (en accord avec X), la suite obtenue à la fin est :

$$\sigma * y \in X \text{ avec } (\sigma * y)_i := \begin{cases} \sigma(\langle\rangle) & \text{pour } \; i = 0 \\ y_{(i-1)/2} & \text{pour } \; i \text{ impair} \\ \sigma\left(\left\langle (\sigma * y)_j \right\rangle_{j<i}\right) & \text{pour } \; i \neq 0, i \text{ pair} \end{cases}$$

— II joue selon la stratégie τ si, pour tout $y \in Y^\omega$, si I joue la suite y (en accord avec X), la suite obtenue à la fin est :

$$y * \tau \in X \text{ avec } (y * \tau)_i := \begin{cases} y_{i/2} & \text{pour } \quad i \text{ pair} \\ \sigma\left(\left\langle (\sigma * y)_j \right\rangle_{j<i}\right) & \text{pour } \quad i \text{ impair} \end{cases}$$

On définira, pour σ une stratégie pour I et $n < \omega$:

$$\sigma | \, n := \left\{ \left\langle (\sigma * y)_j \right\rangle_{j<n}, y \in Y^\omega, y \text{ en accord avec } X \right\}.$$

De même, pour τ une stratégie pour II et $n < \omega$:

$$\tau | \, n := \left\{ \left\langle (y * \tau)_j \right\rangle_{j<n}, y \in Y^\omega, y \text{ en accord avec } X \right\}.$$

Pour ces dernières notations, on parle de stratégie partielle.

Pour les représenter, on étiquettera les flèches de notre schéma. Par exemple, si I suit une stratégie σ et II une stratégie τ, cela donne :

$$\begin{tikzcd}
\text{I :} & & x_0 \arrow[ddr, "\tau"] & & x_2 \arrow[ddr, "\tau"] & & x_4 \arrow[ddr, "\tau"] & \\
(\mathcal{G}_X(A)) & & & & & & & \\
\text{II :} & \emptyset \arrow[uur, "\sigma"] & & x_1 \arrow[uur, "\sigma"] & & x_3 \arrow[uur, "\sigma"] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ce n'est pas le tout de jouer selon une certaine méthode : encore faut-il que celle-ci soit gagnante !

Définition 2.1.6 *Stratégie gagnante.*

— Une stratégie σ est dite gagnante pour I dans $\mathcal{G}_X(A)$ si pour tout $y \in X$, $\sigma * y \in A$.

— Une stratégie τ est dite gagnante pour II dans $\mathcal{G}_X(A)$ si pour tout $y \in X$, $y * \tau \notin A$.

On peut déjà remarquer que, si $\mathcal{G}_X(A)$ est un jeu, alors I et II ne peuvent pas avoir toutes les deux une stratégie gagnante.

2.2 Déterminaison

Définition 2.2.1 *Détermination.* On dit que A est déterminé si et seulement si $\mathcal{G}_X(A)$ est déterminé, si et seulement si I ou II admet une stratégie gagnante.

Fort de cette définition, une question nous vient à l'esprit : tous les jeux sont-ils déterminés ? Essayons dans un cas simple :

Théorème 2.2.1 Si A est (au plus) dénombrable, alors II admet une stratégie gagnante dans $\mathcal{G}_X(A)$.

Preuve. On note $A = \left\{a^i\right\}_{i \in J}$, avec $J \leq \omega$ et pour tout $i < J$, on note $a^i = \left\langle a^i_k \right\rangle_{k<\omega}$. Par l'argument de la diagonale de Cantor, on a une stratégie gagnante τ pour II. En effet, pour tout $i \in J$, on définit :

$$\tau\left(\langle x_j \rangle_{j \leq 2i}\right) := a^i_{2i+1} + 1.$$

Ainsi, si $y \in X$, on a :

$$\forall i \in J, (y * \tau)_{2i+1} = a^i_{2i+1} + 1 \neq a^i_{2i+1}.$$

Donc

$$\forall i \in J, y * \tau \neq a^i, \text{ d'où } y * \tau \notin A.$$

Ceci étant vrai pour y quelconque, τ est bien une stratégie gagnante pour II.

$\square$

Gale et Stewart se sont également posés ce genre de questions, et sont arrivés au travail présenté ci-après.

Chapitre 3

Le travail de Gale et Stewart

3.1 Justification de la notion de détermination

Les résultats qui suivent ont été démontrés par Gale et Stewart dans [GS53].

Théorème 3.1.1 Il existe A une partie de $\mathcal{F}(X)$ telle que $\mathcal{G}_X(A)$ est non déterminé.

Preuve. Appelons $\mathcal{S}_I$ l'ensemble des stratégies de I. D'après le premier chapitre, on peut trouver J un ensemble bien ordonné pour $\leq$ qui permet d'indexer $\mathcal{S}_I$. On peut donc noter :

$$\mathcal{S}_I = \{\sigma_\alpha \ , \ \alpha \in J\} \, .$$

On définit de même $\mathcal{S}_{II}$, et par égalité des cardinaux des ensembles considérés, on peut indexer par le même ensemble J :

$$\mathcal{S}_{II} = \{\tau_\alpha \ , \ \alpha \in J\} \, .$$

Soit $(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_I \times \mathcal{S}_{II}$. On note :

$$\mathcal{P}_I(\sigma) = \{\sigma * y \ , \ y \in X\} \text{ et } \mathcal{P}_{II}(\tau) = \{y * \tau \ , \ x \in X\} \, .$$

Par induction, construisons un ensemble A indéterminable.

Soit 0 le plus petit élément de J. On choisit a_0 un élément quelconque de $\mathcal{P}_{II}(\tau_0)$ et $b_0 \neq a_0$ un élément de $\mathcal{P}_I(\sigma_0)$ (licite car son cardinal est infini).

Soit $\beta \in J$. On suppose que pour tout $\alpha < \beta$, a_α et b_α ont été choisis. Choisissons a_β et b_β.

On a une bijection (provenant de l'indexation) entre $\{b_\alpha, \alpha < \beta\}$ et $\{\alpha \in J, \alpha < \beta\}$.

Ainsi, par définition de J, $|\{b_\alpha, \alpha < \beta\}| < |J| = |\mathcal{S}_I|$. L'ensemble $\mathcal{P}_{II}(\tau_\beta) \setminus \{b_\alpha, \alpha < \beta\}$ est donc non vide. On choisit a_β dans cet ensemble.

De la même manière, $\mathcal{P}_I(\sigma_\beta) \setminus \{a_\alpha, \alpha \leq \beta\}$ est non vide, et on choisit b_β dans cet ensemble.

On note $A = \{a_\alpha, \alpha \in J\}$ et $B = \{b_\alpha, \alpha \in J\}$.

On peut commencer par remarquer que $A \cap B = \emptyset$, par construction de ces ensembles.

Montrons par l'absurde que $\mathcal{G}_X(A)$ est indéterminé.

Supposons que I a une stratégie gagnante σ dans $\mathcal{G}_X(A)$, c'est à dire que $\mathcal{P}_I(\sigma) \subseteq A$. Il existe donc $\alpha \in J$, tel que $\sigma = \sigma_\alpha$. Par définition de b_α, on a $b_\alpha \in \mathcal{P}_I(\sigma_\alpha)$, donc $b_\alpha \in A$. C'est absurde par la remarque précédente.

De la même manière, si on suppose que II a une stratégie gagnante τ, alors on a $\mathcal{P}_{II}(\tau) \cap A = \emptyset$, et il existe $\alpha \in J$, tel que $\tau = \tau_\alpha$. Mais alors $a_\alpha \notin A$, ce qui est absurde.

On a donc bien prouvé que A n'était pas déterminé !

□

Montrons maintenant le théorème de Gale-Stewart :

3.2 Le théorème de Gale-Stewart

Définition 3.2.1 *Topologie sur $\mathcal{F}(X)$.* On munit $\mathcal{F}(X)$ de la topologie produit. Soit $l < \omega$ et $x \in \mathcal{F}(X)$, on définit :

$$\mathcal{V}_l(x) := \left\{y, \exists z \in Y^\omega, y = \langle x_j \rangle_{j<l} {}^\frown z\right\}.$$

La topologie produit est décrite comme la topologie issue de la base d'ouverts

$$\{\mathcal{V}_l(x)\}_{l < \omega, x \in \mathcal{F}(X)}.$$

Les propriétés de A (ouvert, fermé, borélien, ...) sont transposées dans la suite à $\mathcal{G}_X(A)$. On parlera donc de jeu ouvert, fermé, ...

Théorème 3.2.1 (D. GALE et F. M. STEWART). Tout jeu $\mathcal{G}_X(A)$ ouvert ou fermé est déterminé.

Preuve. Commençons par A fermé. Supposons que II n'a pas de stratégie gagnante, et montrons qu'alors I en a forcément une.

Commençons par remarquer que I a la possibilité de choisir $\langle x_0 \rangle \in X$ tel que II n'ait pas de stratégie gagnante à partir de $\langle x_0 \rangle$ (en effet, si ce n'était pas le cas, II aurait une stratégie gagnante à partir de tout $\langle x \rangle \in X$, donc aurait une stratégie gagnante).

De la même manière, si II n'a pas de stratégie gagnante à partir de $\langle x_j \rangle_{j \leq 2i} \in X$, alors pour tout x_{2i+1} tel que $\langle x_j \rangle_{j \leq 2i+1} \in X$, il existe x_{2i+2} tel que $\langle x_j \rangle_{j \leq 2i+2} \in X$ et que II n'ait pas de stratégie gagnante à partir de $\langle x_j \rangle_{j \leq 2i+2}$.

Ainsi, en choisissant pour I un tel x_{2i+2} à chaque tour, on crée une stratégie pour I (on appelle une telle stratégie une *stratégie défensive*).

Or, on a :

$$(A \text{ est fermé}) \Longleftrightarrow (\mathcal{F}(X) \backslash A \text{ est ouvert})$$

$$\Longleftrightarrow \left(\langle x_i \rangle_{i<\omega} \notin A \Longleftrightarrow \exists n < \omega, \forall \left\{ x'_{n+i} \right\}_{i<\omega}, \left\langle x_0, ..., x_n, x'_{n+i} \right\rangle_{i<\omega} \notin A \right).$$

C'est à dire que si I a une stratégie qui ne le fait pas perdre au bout d'un nombre fini de tours, alors cette stratégie est gagnante.

Ici, la stratégie décrite vérifie la propriété annoncée, donc elle est gagnante, et donc $\mathcal{G}_X(A)$ est bien déterminé.

Si A est ouvert, et qu'on suppose que I n'a pas de stratégie gagnante, on peut montrer que II en a forcément une. En effet, il suffit d'utiliser un raisonnement similaire sur $\mathcal{F} \backslash A$ qui est fermé.

□

Après la publication de cette démonstration en 1953, beaucoup de mathématiciens ont essayé tour à tour de généraliser ce résultat (voir pour plus de détails la page 364 de l'article de Matin [MAR75]). Petit à petit, on l'a prouvé pour les éléments de $\mathbf{\Sigma}^0_2$, puis $\mathbf{\Sigma}^0_3$ et $\mathbf{\Sigma}^0_4$. Mais il a fallu attendre 1975 et la publication des travaux de Martin [MAR75] pour avoir une démonstration pour tous les $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\alpha < \omega_1$, c'est à dire pour tous les boréliens.

Chapitre 4

Les travaux de Martin

4.1 Détermination des boréliens

Théorème 4.1.1 (D. A. Martin) S'il existe $\alpha < \omega_1$ tel que $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, alors $\mathcal{G}_X(A)$ est déterminé. Autrement dit, les boréliens sont déterminés.

Preuve. On va ici se baser sur la preuve simplifiée qu'a publiée Martin en 1985 [MAR85], et reprise par Kechris [KEC94].

Le schéma classique de preuve, appelé réduction, est le suivant : on essaye de construire $\tilde{Y}$ un ensemble, $\tilde{X}$ un arbre sur $\tilde{Y}$ et $\tilde{A}$ une partie de $\mathcal{F}(\tilde{X})$ tel que si $\mathcal{G}_{\tilde{X}}(\tilde{A})$ est déterminé, alors $\mathcal{G}_X(A)$ l'est. On raisonne alors sur $\mathcal{G}_{\tilde{X}}(\tilde{A})$, construit pour être plus simple que $\mathcal{G}_X(A)$.

Définition 4.1.1 *Recouvrement.* Un recouvrement de X est un triplet $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$, tel que :

i) $\tilde{X}$ est un arbre non vide (sur un certain ensemble $\tilde{Y}$),

ii) $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ est monotone et conserve la longueur (i.e. $\forall s \in \tilde{X}, |\pi(s)| = |s|$). Ainsi, l'application π induit une fonction continue de $\mathcal{F}(\tilde{X})$ dans $\mathcal{F}(X)$ que l'on confond avec π,

iii) φ associe à une stratégie $\tilde{\sigma}$ de I (respectivement de II) dans $\tilde{X}$ une stratégie σ de I (respectivement de II) dans X, et on a : $\forall\,(n, m) \in \omega^2, m \leq n$,

   a) $\varphi\,(\tilde{\sigma}|\,m) = \varphi\,(\tilde{\sigma}|\,n)|\,m$,

   b) $\varphi\,(\tilde{\sigma}|\,n) = \varphi\,(\tilde{\sigma})|\,n$,

iv) Si $\tilde{\sigma}$ est une stratégie pour I (respectivement pour II) et qu'on se donne $x \in \mathcal{P}_I(\varphi\,(\tilde{\sigma}))$ (respectivement $x \in \mathcal{P}_{II}(\varphi\,(\tilde{\sigma}))$), il existe $\tilde{x} \in \mathcal{P}_I(\sigma)$ (respectivement $\tilde{x} \in \mathcal{P}_{II}(\tilde{\sigma})$) tel que $\pi\,(\tilde{x}) = x$.

Arrêtons-nous un instant sur cette définition pour en comprendre le sens. On cherche à trouver une stratégie pour l'une des deux joueuses sur $\mathcal{G}_X(A)$ en "simulant" une partie de

$\mathcal{G}_X(A)$ par une partie de $\mathcal{G}_{\tilde{X}}(\tilde{A})$. Pour "passer" de $\tilde{X}$ à X, on utilise un "dictionnaire" qui nous permet de traduire les coups joués sur $\tilde{X}$ en coups jouables sur X : c'est l'application π. Le but étant de parler de détermination, on a également besoin d'un "dictionnaire" sur les stratégies : φ. Voyons maintenant ce que représentent les conditions :

ii) Pour que le "dictionnaire" sur les coups soit cohérent, il faut qu'il traduise un i^{eme} coup d'un joueur sur $\tilde{X}$ par un i^{eme} coup du même joueur sur X, d'où la conservation des longueurs.

iii) Il faut également que φ soit définie de manière monotone sur les stratégies partielles : une stratégie se construit "coup après coup" et à un instant donné, elle ne doit pas dépendre du futur. [1]

iv) On doit enfin s'assurer que les deux "dictionnaires" sont cohérents à la limite, lorsque l'on regarde le résultat d'une partie : si l'un des deux joueurs a joué sur X selon une stratégie $\varphi(\tilde{\sigma})$ provenant de $\tilde{X}$, alors la partie doit être l'image par π d'une partie sur $\tilde{X}$ jouée selon $\tilde{\sigma}$.

Voyons l'intérêt d'une telle définition.

Lemme 4.1.1 Si $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$ est un recouvrement de X, alors $\mathcal{G}_X(A)$ peut être "simulé" par $\mathcal{G}_{\tilde{X}}(\pi^{-1}(A))$: les stratégies gagnantes sur $\mathcal{G}_{\tilde{X}}(\pi^{-1}(A))$ vont correspondre par φ aux stratégies gagnantes sur $\mathcal{G}_X(A)$.

Preuve. En effet, cela provient du point iv). Si on prend une stratégie gagnante $\tilde{\sigma}$ de I sur $\mathcal{G}_{\tilde{X}}(\pi^{-1}(A))$, et $x \in \mathcal{P}_I(\varphi(\tilde{\sigma}))$, alors par iv), on peut trouver $\tilde{x} \in \mathcal{P}_I(\tilde{\sigma})$ tel que $\pi(\tilde{x}) = x$. La stratégie $\tilde{\sigma}$ étant gagnante, on a $\tilde{x} \in \pi^{-1}(A)$, donc $x \in A$.

On raisonne de même pour $\tilde{\tau}$ une stratégie gagnante de II sur $\mathcal{G}_{\tilde{X}}(\pi^{-1}(A))$.

□

On note dans toute la suite $\tilde{A} := \pi^{-1}(A)$ et $k < \omega$ désignera un entier. On introduit également :

Définition 4.1.2 *k-recouvrement.* On dit que $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$ est un k-recouvrement de X si :

— $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$ est un recouvrement de X,

— $T|\,2k = \tilde{T}\big|\,2k$,

— π restreint à $T|\,2k$ est l'identité.

Cela veut dire que si $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$ est un k-recouvrement de X, alors les k premiers tours de $\mathcal{G}_{\tilde{X}}(\tilde{A})$ sont identiques aux k premiers tours de $\mathcal{G}_X(A)$.

Lemme 4.1.2 Si $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$ est un k-recouvrement de X, et $\tilde{\sigma}$ une stratégie sur $\mathcal{G}_{\tilde{X}}(\tilde{A})$, alors $\varphi(\tilde{\sigma})\,|2k = \tilde{\sigma}|2k$.

1. En réalité, il faut voir φ comme une application définie sur les stratégies partielles de $\tilde{X}$ dans les stratégies partielles de X, d'où la construction de la preuve du Lemme 4.1.3.

Preuve. En effet, d'après iv), on a $\varphi(\tilde{\sigma})\,|2k \subseteq \tilde{\sigma}|2k$. Comme $T|2k = \tilde{T}|2k$ et que $\varphi(\tilde{\sigma})$ et $\tilde{\sigma}$ correspondent au même joueur (d'après i)), on a bien finalement : $\varphi(\tilde{\sigma})\,|2k = \tilde{\sigma}|2k$. $\square$

Définition 4.1.3 *Dénouer.* Si $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$ est un recouvrement de X, on dira qu'il *dénoue* A si $\tilde{A}$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathcal{F}(\tilde{X})$.

En particulier, si $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$ est un recouvrement de X qui dénoue A, par le théorème de Gale-Stewart, $\mathcal{G}_{\tilde{X}}(\tilde{A})$ est déterminé, et donc, par le Lemme 4.1.1., $\mathcal{G}_X(A)$ est déterminé.

Il suffit donc de prouver que pour tout A borélien, X admet un recouvrement qui dénoue A.

$\square$

Nous allons même prouver un théorème plus fort :

Théorème 4.1.2 Si A est un borélien, alors pour tout $k < \omega$, il existe un k-recouvrement de X qui dénoue A.

Preuve. Soit donc $0 < \beta < \omega_1$ tel que $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\beta$, $\{A_i\}_{i<\omega} \in \left(\bigcup_{\alpha<\beta} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha\right)^\omega$ tel que $A = \bigcup_{i<\omega} A_i$ et $\{\alpha_i\}_{i<\omega} \in \omega^\omega$ tel que $\forall i < \omega, A_i \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha_i}$, $\alpha_i < \beta$. Prouvons par induction sur β qu'il existe un k-recouvrement de X qui dénoue A.

On commence par admettre temporairement le lemme suivant :

Lemme 4.1.3 Si A est fermé, pour tout $k < \omega$, il existe un k-recouvrement de X qui dénoue A.

Comme un k-recouvrement qui dénoue A dénoue aussi $\mathcal{F}(X)\setminus A$, on a le résultat pour $\beta = 1$.

Supposons maintenant le résultat prouvé pour tout $\alpha < \beta$. C'est en particulier le cas pour les $\{\alpha_i\}_{i<\omega}$. Soit (X_1, π_1, φ_1) un k-recouvrement de $X_0 := X$ qui dénoue A_0. On a alors : $\forall i < \omega, \pi_1^{-1}(A_i) \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha_i}(X_1)$ par stabilité de l'ensemble par pré-image continue. Par récurrence, on définit, pour $0 < i < \omega$, $(X_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ un $(k+i)$-recouvrement de X_i qui dénoue $\left(\prod_{p=1}^{i} \pi_{i+1-p}^{-1}\right)(A_i)$. Par la remarque précédente, l'ensemble dénoué est bien défini.

Supposons que le lemme suivant est démontré :

Lemme 4.1.4 Pour tout $i < \omega$, on se donne $(X_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ un $(k+i)$-recouvrement de X_i (avec la convention $X_0 = X$). Alors, pour tout $i < \omega$, il existe $X_\infty, \pi_{\infty,i}$ et $\varphi_{\infty,i}$ tels que $(X_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$ soit un $(k+i)$-recouvrement de X_i, que $\pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1} = \pi_{\infty,i}$ et que $\varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty,i+1} = \varphi_{\infty,i}$.

Alors, on a accès à $\{(X_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})\}_{i<\omega}$ comme décrit dans l'énoncé du lemme. On a donc, pour tout $i<\omega$, $\pi_{i+1}^{-1} = \pi_{\infty,i+1} \circ \pi_{\infty,i}^{-1}$. Il en résulte que, pour tout $i < \omega$, on a :

$$\left(\prod_{p=0}^{i} \pi_{i+1-p}^{-1}\right)(A_i) = \left(\prod_{p=0}^{i} \pi_{\infty,i+1-p} \circ \pi_{\infty,i-p}^{-1}\right)(A_i) = \pi_{\infty,i+1} \circ \pi_{\infty,0}^{-1}(A_i).$$

Or, pour tout $i<\omega$, $\left(\prod_{p=0}^{i} \pi_{i+1-p}^{-1}\right)(A_i) \in \mathbf{\Delta}_{\alpha_i}^0$ car $(X_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ dénoue $\left(\prod_{p=1}^{i} \pi_{i+1-p}^{-1}\right)(A_i)$. On a donc $\pi_{\infty,i+1} \circ \pi_{\infty,0}^{-1}(A_i) \in \mathbf{\Delta}_{\alpha_i}^0(X_i)$. Par stabilité de l'ensemble par la pré-image continue $\pi_{\infty,i+1}^{-1}$, on a donc $\pi_{\infty,0}^{-1}(A_i) \in \mathbf{\Delta}_{\alpha_i}^0(X_i)$. Donc $(X_\infty, \pi_{\infty,0}, \varphi_{\infty,0})$ dénoue tous les A_i. Ainsi, $\pi_{\infty,0}^{-1}(A) = \bigcup_{i<\omega} \pi_{\infty,0}^{-1}(A_i) \in \mathbf{\Sigma}_1^0$, mais n'est pas forcément fermé.

Par le Lemme 4.1.3, on a accès à $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$ un k-recouvrement de X_∞, qui dénoue $\pi_{\infty,0}^{-1}(A)$. Alors, on a $(\tilde{X}, \pi_{\infty,0} \circ \pi, \varphi_{\infty,0} \circ \varphi)$, un k-recouvrement de X qui dénoue A. $\square$

Il ne reste qu'à prouver les deux lemmes utilisés.

Preuve. (*Lemme 4.1.4*) On a à disposition la suite de recouvrement :

$$X \xleftarrow{k\text{-rec.}} (X_1, \pi_1, \varphi_1) \xleftarrow{(k+1)\text{-rec.}} (X_2, \pi_2, \varphi_2) \xleftarrow{(k+2)\text{-rec.}} \cdots$$

Où rec. signifie recouvrement

D'où, pour tout $i<j<\omega$:

$$X_i|\left(2(k+i)\right) = X_j|\left(2(k+i)\right).$$

Suite à cette remarque, comme on veut un unique X_∞, on peut y penser comme une limite la suite $\{X_i\}_{i<\omega}$:

$$s \in X_\infty \Longleftrightarrow \forall i<\omega,\ \left(|s| \leq 2(k+i) \Longrightarrow s \in X_i\right).$$

On a :

$$\forall i<\omega,\ X_\infty|\left(2(k+i)\right) = X_i|\left(2(k+i)\right).$$

En particulier, X_∞ est bien un arbre. Soit maintenant $i<\omega$ un entier fixé, interessons nous à $\pi_{\infty,i}$ et $\varphi_{\infty,i}$.

Comme $(X_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$ doit-être un $(k+i)$-recouvrement de X_i, $\pi_{\infty,i}$ est égal à l'identité sur $X_i|\left(2(k+i)\right)$.

Pour une suite s plus longue, on prend j tel que $|s| < 2(k+i+j)$, et on pose :

$$\pi_{\infty,i}(s) := \left(\prod_{p=i+1}^{i+j} \pi_p \right)(s).$$

La définition est licite, car ne dépend pas de j, car pour tout $\left\lfloor \frac{|s|}{2} \right\rfloor - k < l < \omega, \pi_l(s) = s$.

On a bien $\pi_{\infty,i}$ qui conserve la longueur, et qui vérifie le point ii). De plus, par sa définition, on a bien $\pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1} = \pi_{\infty,i}$.

Dans le même esprit, concernant $\varphi_{\infty,i}$, pour σ_∞ une stratégie sur X_∞, on pose $\varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)|(2(k+i)) := \sigma_\infty|(2(k+i))$. Pour $0 < j < \omega$, on pose :

$$\varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)|(2(k+i+j)) = \left(\prod_{p=i+1}^{i+j} \varphi_p \right)(\sigma_\infty|(2(k+i+j))).$$

C'est bien licite, car, par définition de X_∞, $\sigma_\infty|(2(k+i+j))$ est une stratégie partielle sur X_j.

Par sa définition, $\varphi_{\infty,i}$ vérifie bien le point iii), et on a bien $\varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty,i+1} = \varphi_{\infty,i}$. Il ne reste dons plus qu'à vérifier le point iv).

On se munit donc de σ_∞ une stratégie sur X_∞ et de $x_i \in \mathcal{P}_v(\varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)) \subseteq \mathcal{F}(X_i)$, où $v = \mathrm{I}$ ou II. Comme $(X_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ est un $(k+i)$-recouvrement de X_i, il existe $x_{i+1} \in \mathcal{P}_v(\varphi_{i+1}^{-1}(\varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty))) = \mathcal{P}_v(\varphi_{\infty,i+1}(\sigma_\infty))$ tel que $\pi_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$.

Sur le même principe, on trouve successivement, pour tout $1 < j < \omega$, $x_{i+j} \in \mathcal{P}_v(\varphi_{\infty,i+j}(\sigma_\infty))$ tel que $\pi_{i+j}(x_{i+j}) = x_{i+j-1}$, c'est à dire tel que :

$$\left(\prod_{p=i+1}^{i+j} \pi_p \right)(x_{i+j}) = x_i.$$

Or, les applications π_l sont égales à l'identité sur les suites de longueurs inférieures à $2(k+l-1)$. Ainsi, la suite $(x_{i+j})_{j<\omega}$ converge dans $\mathcal{F}(X_\infty)$, par définition de X_∞. Sa limite est notée $x_{\infty,i}$, et on a :

$$\forall j < \omega,\ x_{\infty,i}|(2(k+i+j)) = x_{i+j}|(2(k+i+j)).$$

Pour tout $0 < j < \omega$, comme on a $\varphi_{\infty,i+j}(\sigma_\infty)|(2(k+i+j)) = \sigma_\infty|(2(k+i+j))$, et que $x_{i+j} \in \mathcal{P}_v(\varphi_{\infty,i+j}(\sigma_\infty))$, on a bien $x_{\infty,i} \in \mathcal{P}_v(\sigma_\infty)$.

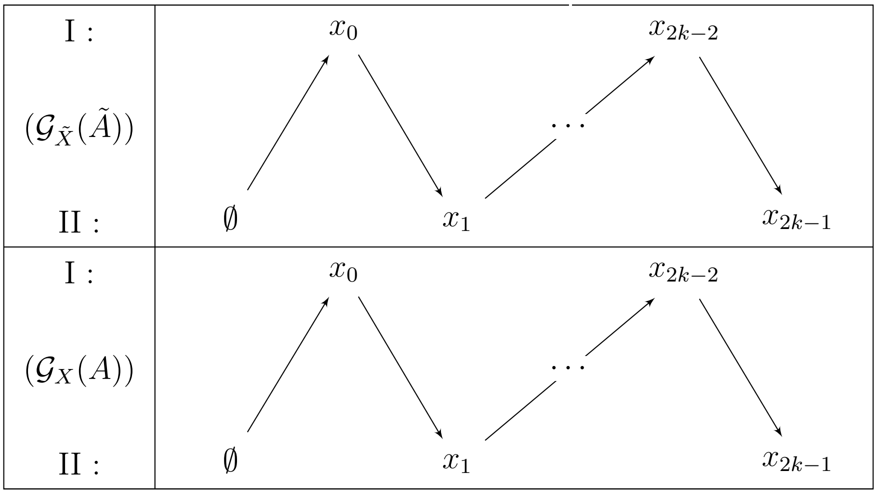
Enfin, par définition de $\pi_{\infty,i}$, on a $\pi_{\infty,i}(x_{\infty,i}) = x_i$. Le point iv) est bien vérifié, donc le Lemme 4.1.4 est vrai.

$\square$

Preuve. (*Lemme 4.1.3*) Pour rappel, on veut montrer que si A est fermé dans $\mathcal{F}(X)$ et que $k < \omega$, alors il existe un k-recouvrement de X qui dénoue A.

On fixe dons un tel A et un tel k. On cherche un triplet $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$ qui soit un k-recouvrement de X, tel $\pi^{-1}(A)$ soit ouvert et fermé dans $\mathcal{F}(\tilde{X})$. Regardons pour cela comment va être joué le jeu sur $\tilde{X}$ (on appelle dans la suite $\tilde{x}$ la suite résultant du jeu simulé sur $\tilde{X}$).

Comme on veut avoir un k-recouvrement de X, les k premiers tours sur $\tilde{X}$ et sur X doivent être identiques. Notons $\{x_i\}_{i<2k}$ ces premiers coups. On représente les débuts de parties :



Introduisons une nouvelle notion, qui va nous servir dans la suite :

Définition 4.1.4 *Sous-jeu.* On dit que S est un sous-jeu de X si $S \subseteq X$ et S est un arbre.

Le sous-jeu S sera dit I-imposé si :

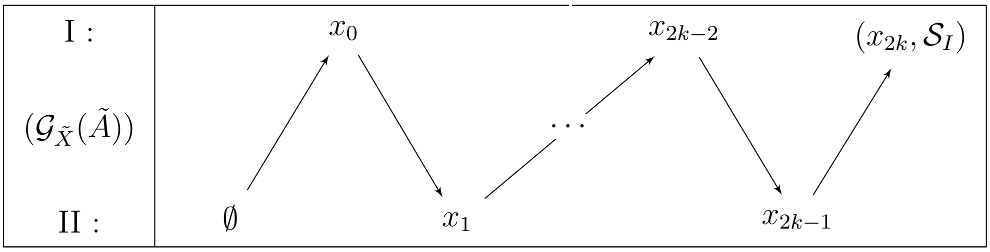
$$\forall \langle x_j \rangle_{j \leq 2n} \in S,\ \forall x_{2n+1} \in Y, \langle x_j \rangle_{j \leq 2n+1} \in X \Longrightarrow \langle x_j \rangle_{j \leq 2n+1} \in S.$$

On définit de même un sous-jeu II-imposé, si :

$$\forall \langle x_j \rangle_{j \leq 2n+1} \in S,\ \forall x_{2n+2} \in Y, \langle x_j \rangle_{j \leq 2n+2} \in X \Longrightarrow \langle x_j \rangle_{j \leq 2n+2} \in S.$$

On peut également parler de *quasi-stratégie* comme le font Martin [MAR75] et Kechris [KEC94].

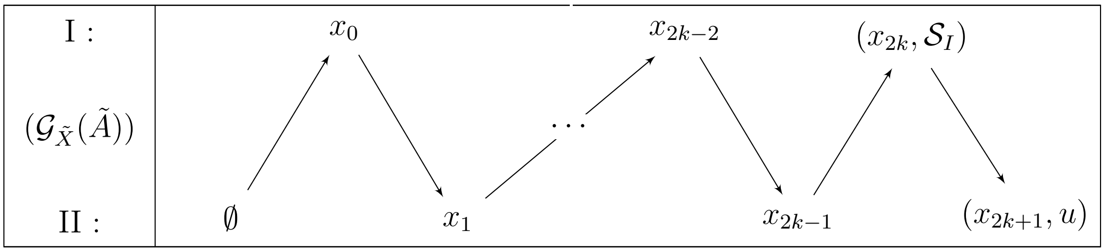
Donnons maintenant le $(k+1)^{eme}$ coup pour I : ce sera un couple (x_{2k}, S_I) où x_{2k} est tel que $\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1} \in X$ et tel que S_I est un sous-jeu I-imposé de $X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}$, avec la convention que II commence le jeu sur $X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}$.



Le sens de ce coup est le suivant : I joue toujours un élément de Y, mais elle annonce également qu'elle va restreindre ses prochains coups à S_I.

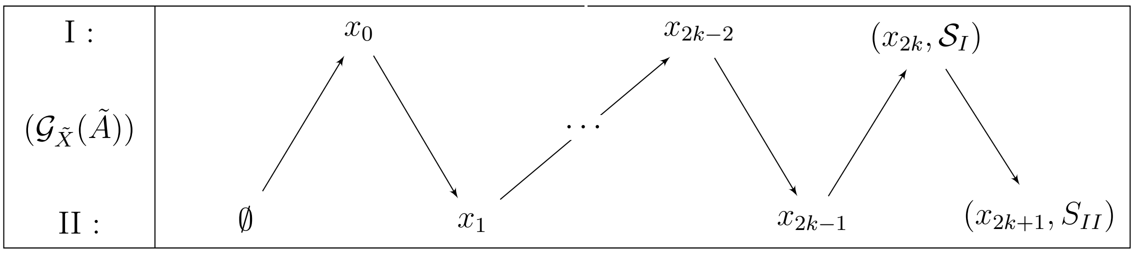
En réponse, II a deux possibilités :

Option 1. II peut gagner si I se restreint à S_I : dans ce cas, A étant fermé, II peut jouer un nombre fini de fois pour s'assurer la victoire (i.e. être sûr que la suite infinie $\langle x_j \rangle_{j<\omega}$ créée ne soit pas dans A). On a donc accès à $u \in X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}$, tel que $|u|$soit de longueur paire, et que $u \in (X_I)_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}} \backslash A_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}$. On fait donc jouer à II le couple (x_{2k+1}, u) où u a été défini au-dessus et tel que $x_{2k+1} = u_{2k+1}$.



Si II choisit cette option, dans la suite, I et II joueront chacun à leur tour un élément de Y (on reprend les notations habituelles), tel que pour tout $i < \omega$, $\langle x_j \rangle_{j<i} \in X$, et tel que $x|(|u| - 1) = u$.

Option 2. Sinon, II n'a pas de possibilité de gagner si I ne fait pas "d'erreur" (c'est à dire que I a une stratégie gagnante). II joue alors un couple (x_{2k+1}, S_{II}) tel que $\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1} \in X$ et que S_{II} soit un sous-jeu II-imposé de $(S_I)_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}}$, avec $\mathcal{F}(S_{II}) \subseteq A_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}}$ (d'une certaine manière, elle déclare forfait).



Ici, dans la suite, I et II joueront chacun à leur tour un élément de Y (on reprend les notations habituelles), tel que pour tout $i < \omega$, $\langle x_j \rangle_{j<i} \in S_{II}$.

On a donc défini les règles pour le jeu sur $\tilde{X}$. Formellement, $\tilde{X}$ est donc l'ensemble constitué de toutes les suites finies de la forme :

$$\langle x_0, ..., x_{2k-1}, (x_{2k}, S_I), (x_{2k+1}, (1, u)), x_{2k+2}, ..., x_i \rangle$$

ou

$$\langle x_0, ..., x_{2k-1}, (x_{2k}, S_I), (x_{2k+1}, (2, S_{II})), x_{2k+2}, ..., x_i \rangle,$$

dont les conditions sur tous les éléments sont définis plus haut.

Il est facile de voir que $\tilde{X}$ est un arbre (je laisse le soin au lecteur de définir correctement l'ensemble de base de $\tilde{X}$). Il reste maintenant à s'intéresser aux définitions de π et φ.

L'application π est définie naturellement comme suit :

$$\pi(\langle x_0, ..., x_{2k-1}, (x_{2k}, S_I), (x_{2k+1}, \bullet), x_{2k+2}, ..., x_i \rangle) = \langle x_j \rangle_{j \leq i},$$

Où $\bullet$ représente un couple de la forme $(1, u)$ ou de la forme $(2, S_{II})$.

Remarque Il est important de remarquer que, suite à la définition de $\tilde{X}$, on a :

$$\tilde{x} \in \tilde{A} \Longleftrightarrow \tilde{x}_{2k+1} \text{ est de la forme } (x_{2k+1}(2, S_{II})).$$

C'est à dire que II a choisi l'*Option 2*.

Fort de cette remarque, on va pouvoir montrer que $\tilde{A} \in \mathbf{\Delta}_1^0\left(\mathcal{F}(\tilde{X})\right)$. En effet, $\tilde{A}$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par l'application continue π. C'est également un ouvert car, grâce à la remarque précédente, on peut voir $\tilde{A}$ comme une union d'ouverts de base de $\tilde{X}$ (voir la définition 3.2.1 et la remarque précédente). Donc, si on arrive à construire φ, on aura bien construit un k-recouvrement qui dénoue A.

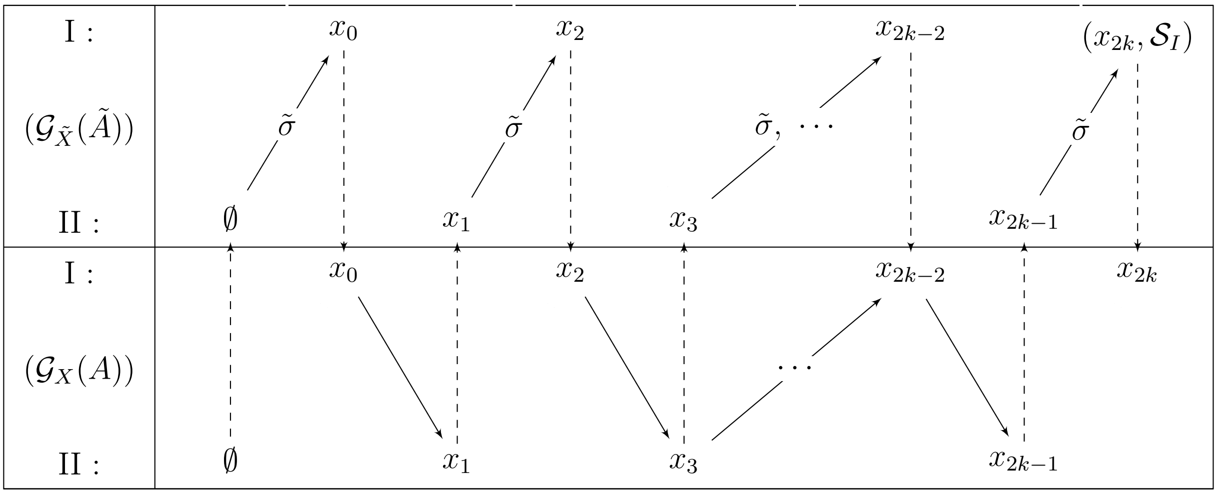
Reste à définir φ. On va le faire de façon assez informelle, pour ne pas alourdir ce rapport. Pour cela, donnons-nous $\tilde{\sigma}$ une stratégie (attention, elle n'est pas forcément gagnante !) sur $\tilde{X}$. On va construire à partir de $\tilde{\sigma}$ une stratégie σ sur X, de manière à vérifier les points iii) et iv) de la définition de recouvrement.

Cas 1. Supposons que $\tilde{\sigma}$ est une stratégie pour I, et construisons une stratégie σ.

Pour voir comment simuler notre stratégie, on va simuler un jeu sur $\tilde{X}$ où I suit $\tilde{\sigma}$, et on va construire pas à pas σ sur le jeu sur X.

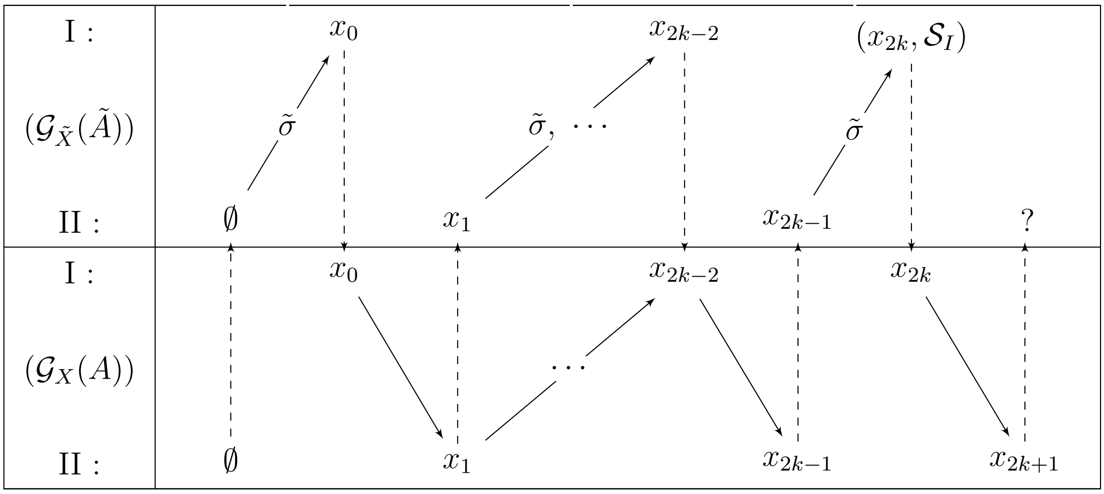
Pour les k premiers coups, on veut un k-recouvrement, donc on doit avoir $\sigma|2k = \varphi(\tilde{\sigma})|2k = \tilde{\sigma}|2k$. La stratégie $\tilde{\sigma}$ fait ensuite jouer (x_{2k}, S_I) à I dans $\tilde{X}$, et on pose que σ fait jouer x_{2k} à I dans X.

On peut le représenter ainsi :



On a représenté (et c'est une convention pour la suite) les coups reportés d'un jeu à l'autre par les flèches $- \rightarrow$. Les coups joués dans X par II en réponse à I sont symbolisés par les flèches simples $\longrightarrow$. Enfin, les coups joués selon la stratégie $\tilde{\sigma}$ sont décrits par les flèches simples étiquetées par celle-ci.

Voyons maintenant ce que peut répliquer II dans $\tilde{X}$ en lien avec le coup de II dans X.



Considérons le jeu $\mathcal{G}_1 := \mathcal{G}_{(S_I)_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}}} \left(\mathcal{F}\left((S_I)_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}} \right) \big\backslash A_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}} \right)$. L'ensemble A étant fermé, $A_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}}$ l'est également, et donc le jeu considéré est ouvert, donc déterminé.

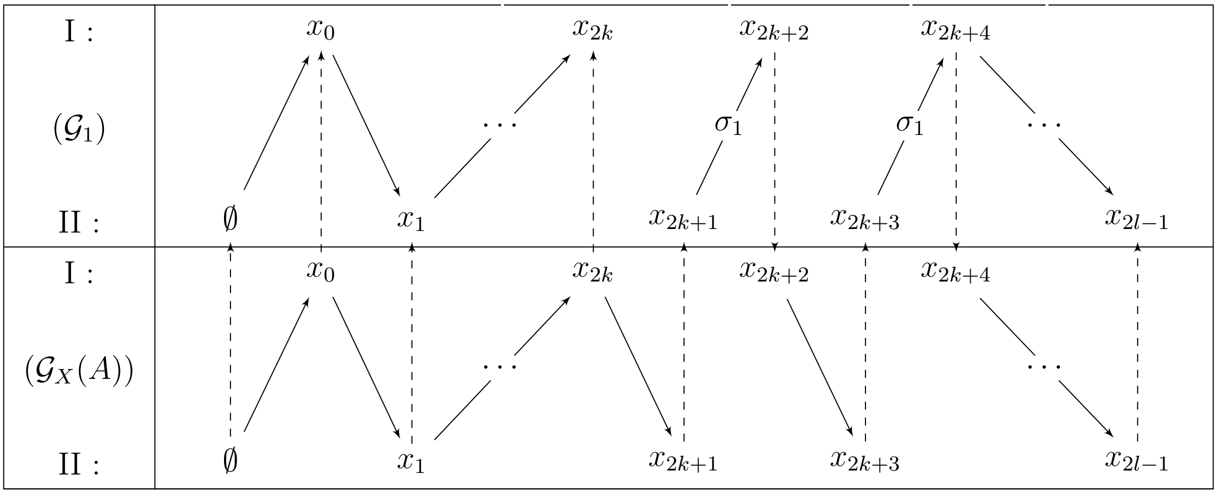
Concrètement, I gagne ce jeu si, après les $2k+2$ coups décrits plus haut dans X, tout en restant dans le (sous)-jeu S_I, la suite définie à la fin du jeu n'est pas dans A.

Sous-cas 1.a. Supposons que I ait une stratégie gagnante dans $\mathcal{G}_1$. Cela signifie que quelle que soit la suite $y \in Y^\omega$ jouée par II après les premiers $2k+2$ coups qui restent définis par $\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}$, I peut jouer dans S_I de telle sorte que la suite x définie en sortie de jeu ne soit pas dans $A_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}}$, donc pas dans A.

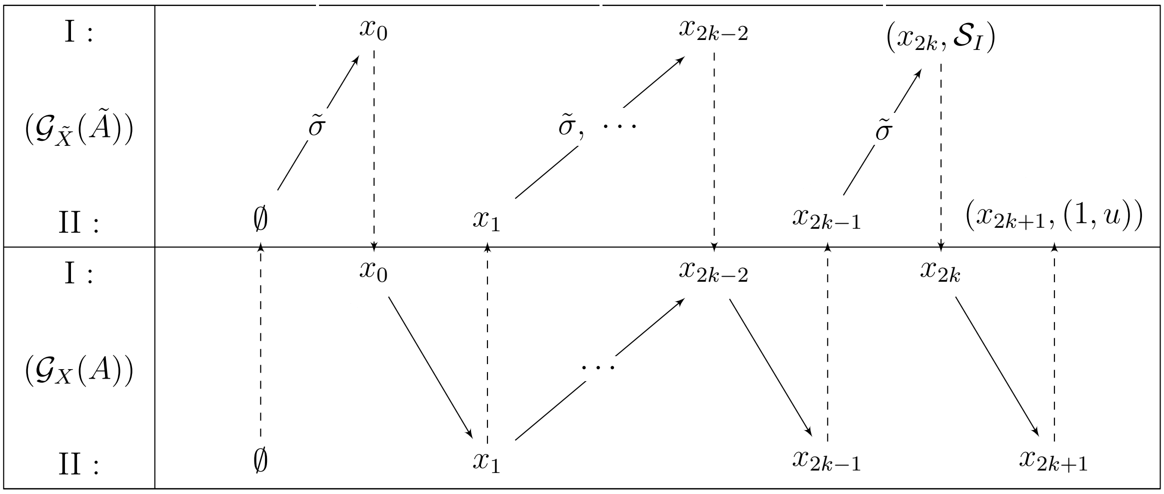
Or, comme A est un fermé par hypothèse, $A_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}}$ est fermé dans $\mathcal{F}\left((S_I)_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}} \right)$.

Comme déjà vu, I n'a donc besoin que d'un nombre fini de coups pour s'assurer la victoire dans $\mathcal{G}_1$, et ceci peu importe les coups de II ! On note cette stratégie σ_1.

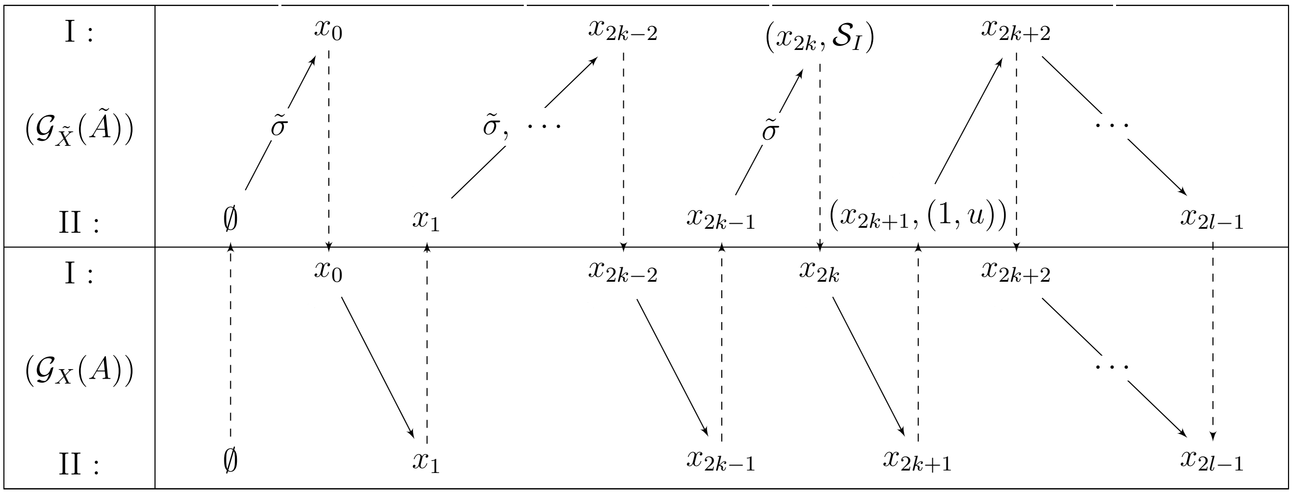
Alors, on fait jouer I dans X à partir de son $(k+1)^{eme}$ coup selon la stratégie σ_1. Il existe donc $l > k$ tel que $u = \langle x_j \rangle_{j \leq 2l-1}$ soit minimale pour la longueur et que pour $x \in \mathcal{F}(X)$, si $x|(2l-1) = u$ alors $x \notin A$.



On peut alors associer à x_{2k+1} dans $\tilde{X}$ le coup $(x_{2k+1}, (1, u))$.

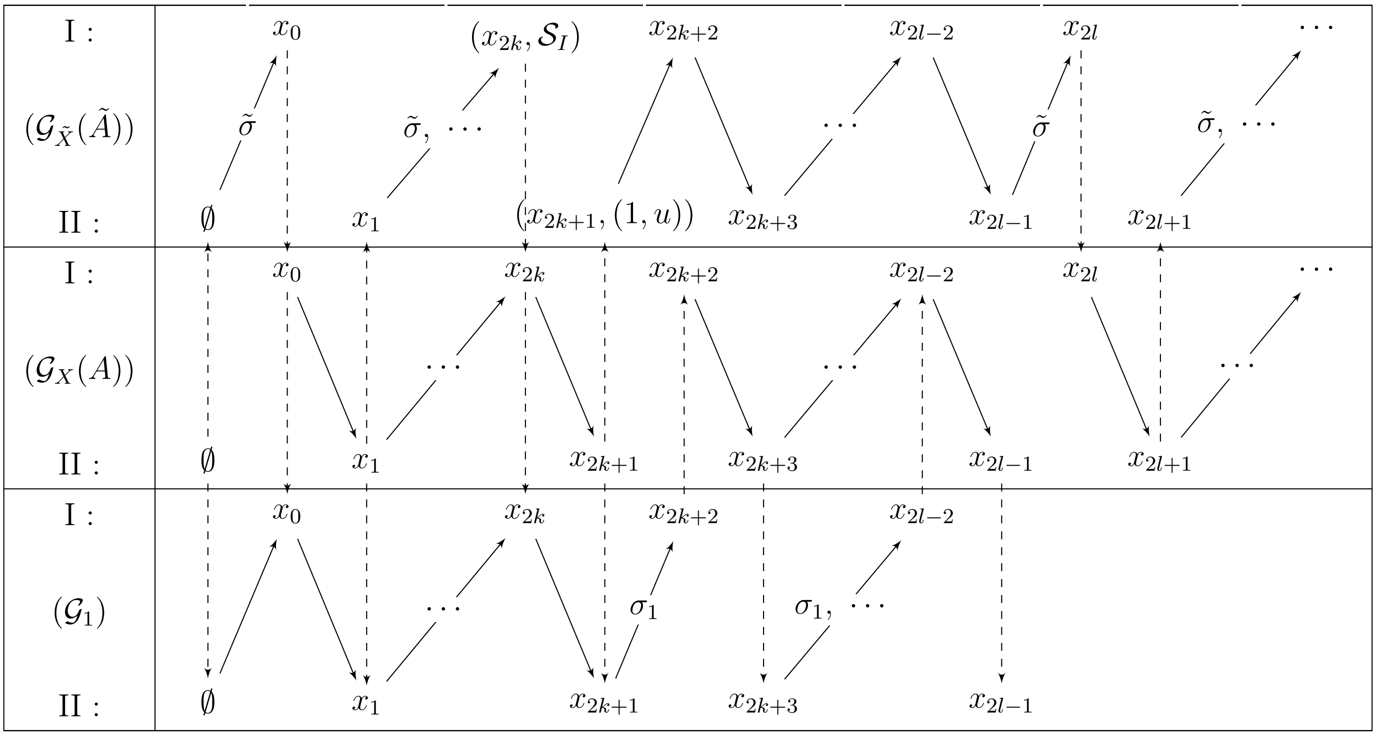


Par définition des règles du jeu sur $\tilde{X}$, on a aux coups suivants :



C'est bien licite, car par définition de u, II (dans X) va bien jouer les termes d'indices impairs de la suite u, et I (dans X) va jouer les termes d'indices pairs car elle suit la stratégie σ_1.

Enfin, pour les coups suivants (après $2l-1$), σ suivra $\tilde{\sigma}$. Cela se résume graphiquement de la manière suivante :



Sous-cas 1.b. Supposons maintenant que II ait une stratégie gagnante dans $\mathcal{G}_1$. On définit l'ensemble suivant :

$$S_{II} := \left\{ u \in (S_I)_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}}, u \text{ n'est pas perdante pour II} \right\}.$$

Comme déjà dit, on a $A_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}}$ fermé dans $(S_I)_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k+1}}$. Ainsi, S_{II} est un sous-jeu de $\mathcal{G}_1$ dans lequel II est gagnante (on dit que c'est un sous-jeu gagnant pour II). On a donc $S_{II} \subseteq \mathcal{F}^{-1}\left(A_{\langle x_j\rangle_{j\leq 2k+1}}\right)$. Comme on a, par définition, $S_{II} \subseteq (S_I)_{\langle x_j\rangle_{j\leq 2k+1}}$, on peut faire jouer $(x_{2k+1},(2,S_{II}))$ à II en k^{eme} coup pour $\tilde{X}$ (c'est licite d'après ce qui précède).

Cependant, il semble qu'on puisse arriver à un problème : en effet, dans la simulation sur $\tilde{X}$ les coups de II doivent se restreindre à S_{II}. Mais dans le jeu sur X, ce n'est pas le cas. Si II joue dans S_{II} dans le jeu sur X, la simulation marche, et dans ce cas, pour la suite, on fait suivre à σ la stratégie $\tilde{\sigma}$ comme dans le dernier sous-cas.

Mais il est aussi possible qu'au bout d'un certain temps, II joue un coup dans le jeu sur X qui soit incompatible avec le sous-jeu S_{II}. Notons alors $2l-1 > 2k+1$ l'indice à partir duquel la suite sort de S_{II}. Par définition du sous-jeu S_{II}, cela signifie que, dans le jeu :

$$\mathcal{G}_1' := \mathcal{G}_{(S_I)_{\langle x_j\rangle_{j\leq 2l-1}}}\left(\left((S_I)_{\langle x_j\rangle_{j\leq 2l-1}}\right)\Big\backslash A_{\langle x_j\rangle_{j\leq 2l-1}}\right),$$

I a une stratégie gagnante.

On se retrouve alors dans le sous-cas 1.a, où k est remplacé par $l-1$. Dans ce cas, comme $A_{\langle x_j\rangle_{j\leq 2l-1}}$ est fermé dans $\mathcal{F}\left((S_I)_{\langle x_j\rangle_{j\leq 2l-1}}\right)$, I n'a besoin que d'un nombre fini de coups pour s'assurer la victoire dans $\mathcal{G}_1'$, et ceci peu importe les coups de II. On note cette stratégie σ_1'.

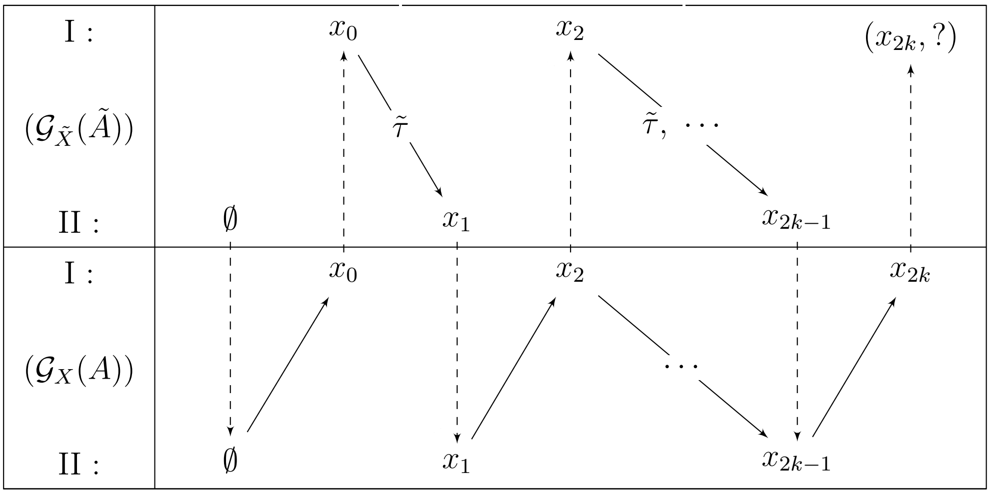
Alors, on fait jouer I dans X à partir de son $(k+1)^{eme}$ coup selon la stratégie σ_1'. Il existe donc $m > l$ tel que $u = \langle x_j\rangle_{j\leq 2m-1}$ soit minimale pour la longueur et que pour $x \in \mathcal{F}(X)$, si $x|(2m-1) = u$ alors $x \notin A$.

On fait donc jouer $(x_{2k+1},(1,u))$ à II dans $\tilde{X}$ (ce qui n'affecte pas les coups déjà joués), et la suite des coups est réglée de la même manière que dans le sous-cas 1.a..

De cette manière, on a bien construit φ de telle manière que toute stratégie gagnante pour I sur $\tilde{X}$ ait pour image par φ une stratégie gagnante pour I sur X.

Cas 2. Supposons maintenant que $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}$ soit une stratégie pour II, et construisons une stratégie τ.

De nouveau, comme on veut un k-recouvrement, on a $\varphi(\tilde{\tau})|2k = \tilde{\tau}|2k$. Mais pour le coup x_{2k} sur X, que reporter sur $\tilde{X}$? (on doit au moins reporter x_{2k} dans le k^{eme} coup de I sur $\tilde{X}$ pour être en accord avec la définition de π).



On va distinguer 2 cas, selon ce que II va jouer dans $\tilde{X}$ à son k^{eme} coup. Pour cela, on va définir $\mathcal{U}$ l'ensemble des parties (représentées par des suites infinies) de $X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}$ jouées selon $\tilde{\tau}$ telles que II joue à son k^{eme} coup dans $\tilde{X}$ un élément de la forme $(x_{2k+1}, (1, \bullet))$. Pour correctement l'écrire, on introduit :

— $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-jeux pour I sur $X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}$,

— $U := \big\{ u \in X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}},\ |u| \geq 2k+1 \wedge |u|$ est pair$\wedge$
$\exists S_u \in \mathcal{S}, \tilde{x}_{2k} = (x_{2k}, S_u) \Longrightarrow \tilde{\tau}\left(\langle \tilde{x}_j \rangle^\frown_{j \leq 2k-1}(x_{2k}, S_u) \right) = (x_{2k+1}, (1, u)) \big\}$.

On a donc :

$$\mathcal{U} := \left\{ x \in \mathcal{F}(X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}),\ \exists n \in \omega, x|n \in U \right\}.$$

On remarque que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{F}(X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}})$ comme union d'ouverts. Ainsi, le jeu :

$$\mathcal{G}_2 := \mathcal{G}_{X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}} \left(\left(\mathcal{F}\left(X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}} \right) \right) \backslash \mathcal{U} \right)$$

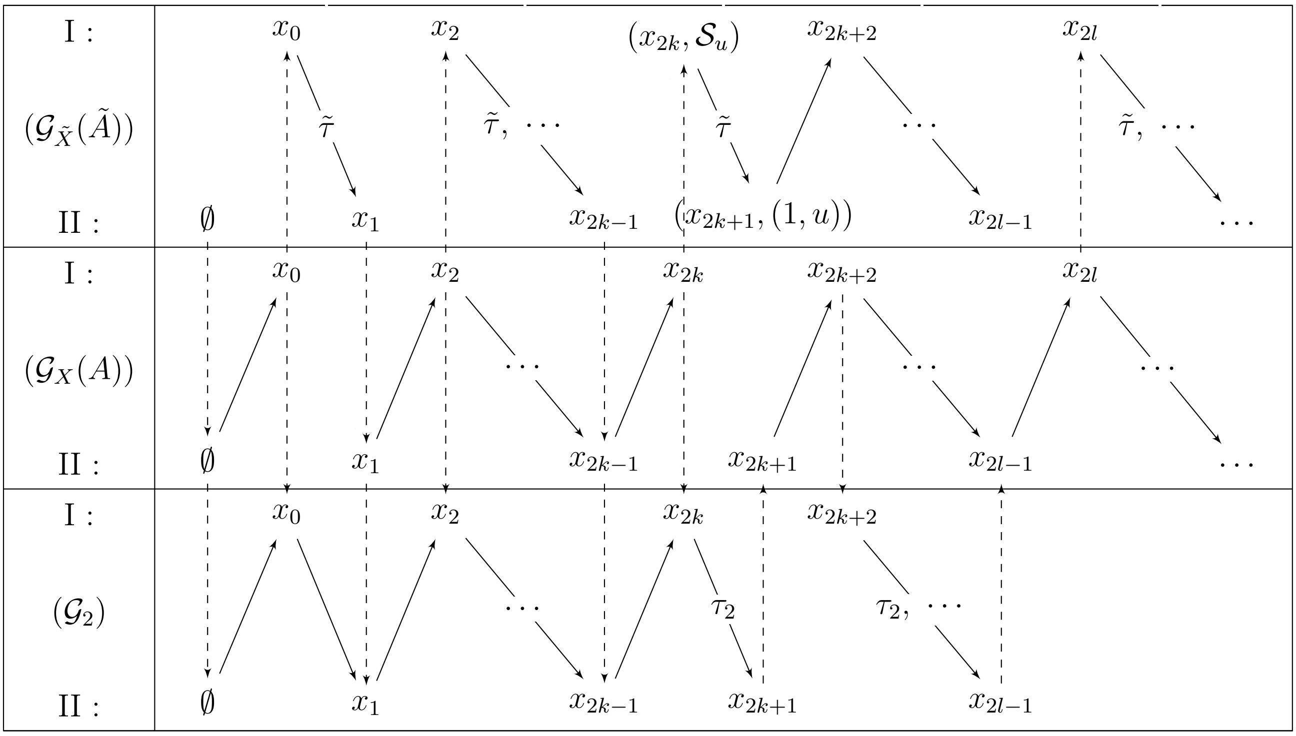
est fermé, donc déterminé.

Sous-cas 2.a. Supposons que II ait une stratégie gagnante τ_2 dans $\mathcal{G}_2$. Cela signifie que quels que soient les coups de I sur $\tilde{X}_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}$, $\tilde{\tau}$ fait jouer à II un élément de la forme $(x_{2k+2}, (1, \bullet))$ pour son k^{eme} coup. De plus, le jeu $\mathcal{G}_2$ étant fermé, il suffit d'un nombre fini de coups à II pour être sûre de gagner. Il suffit en fait de construire un élément de U en un nombre fini d'étapes.

Faisons donc jouer II dans X à partir de son k^{eme} coup selon la stratégie τ_1. Il existe donc $l > k$ tel que $u = \langle x_j \rangle_{j \leq 2l-1}$ soit minimale pour la longueur et que $u \in U$.

Par définition de U, il existe donc S_u un sous-jeu de $\tilde{X}$ tel qu'on ait l'enchaînement suivant : dans $\tilde{X}$, I joue (x_{2k}, S_u), puis II joue un certain $(x_{2k+1}, (1, u))$, un tour qui soit cohérent avec la suite des coups dans X jusqu'au tour l. Après cela, τ suit simplement $\tilde{\tau}$.

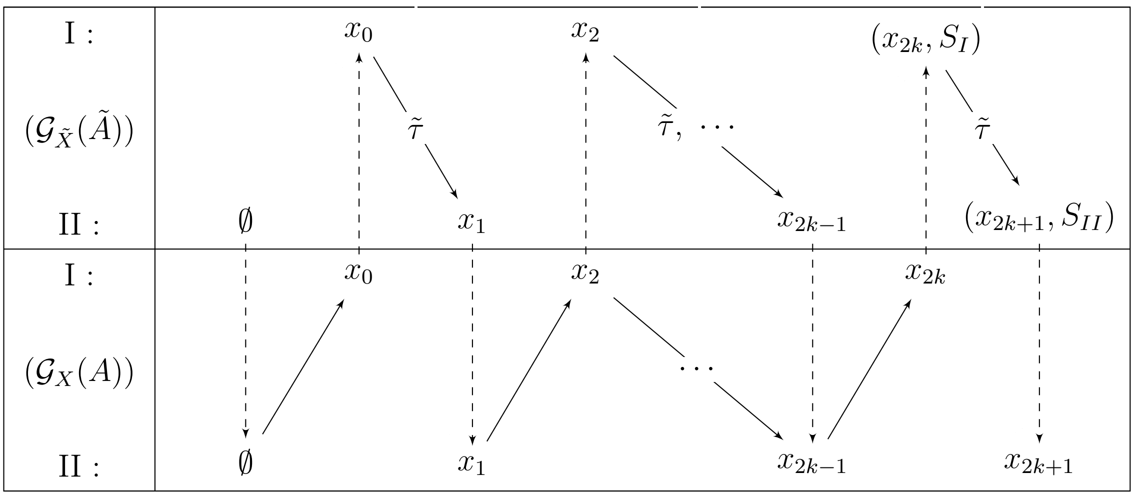
On peut le résumer ainsi :



Sous-cas 2.b. Enfin, supposons que I ait une stratégie gagnante σ_1 dans $\mathcal{G}_2$. On définit alors, de la même manière que dans le sous-cas 1.b. :

$$S_I := \left\{u \in X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}, u \text{ n'est pas perdante pour I}\right\}.$$

Comme $\mathcal{U}$ est ouvert dans $X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2k}}$, S_I est un sous-jeu gagnant pour I de $\mathcal{G}_2$. Ainsi, si I joue (x_{2k}, S_I) pour son k^{eme} coup dans $\tilde{X}$, par définition de $\mathcal{U}$, $\tilde{\tau}$ va faire jouer à II en réponse un élément de la forme $(x_{2k+1}, (2, \bullet))$ (sinon il y a contradiction avec le fait que S_I soit un sous-jeu gagnant pour I). On en arrive donc à :



Pour la suite, tant que I joue dans X de telle manière à ce que la suite de coups dans $\tilde{X}$ reste dans S_I, on utilise la stratégie $\tilde{\tau}$ comme au début.

Si au contraire, I joue un coup dans X qui fait sortir la suite construite dans $\tilde{X}$, on se retrouve dans une situation similaire au sous-cas 1.a. : Si on note $2l$ l'indice du coup qui fait sortir la suite de S_I, par définition du sous-jeu S_I, II a une stratégie gagnante dans le jeu :

$$\mathcal{G}_2' := \mathcal{G}_{X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2l}}} \left(\left(X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2l}} \right) \backslash \mathcal{U}_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2l}} \right).$$

On se retrouve alors dans le sous-cas précédent, où k est remplacé par l.
En effet, II a donc une stratégie gagnante τ_2' qui lui fournit une suite finie (l'ensemble étant ouvert) appartenant à $\mathcal{U}_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2l}}$ qui soit cohérente avec les coups de I dans X.
On fait alors jouer II dans X à partir de son $(k+1)^{eme}$ coup selon la stratégie τ_2'. Il existe donc $m > l$ tel que $u = \langle x_j \rangle_{j \leq 2m}$ soit minimale pour la longueur et soit tel que $u \in U$.
Ainsi, sans que les coups suivants soient changés, on remplace (x_{2k}, S_I) par $\left(x_{2k}, X_{\langle x_j \rangle_{j \leq 2l}}\right)$ et $(x_{2k+1}, (2, S_{II}))$ par $(x_{2k}, (1, u))$.

On a bien défini φ de telle manière que $(\tilde{X}, \pi, \varphi)$ soit un k-recouvrement de X qui dénoue A, ce qui permet d'achever la preuve du Lemme, et donc du théorème de Martin.
$\square$

Chapitre 5

Remarques, interprétations et conséquences

5.1 Sur l'axiomatique de base

Dans certains articles (par exemple [MAR75]), on n'utilise pas l'axiomatique de ZFC, mais une axiomatique plus faible, qui fait que l'on se pose la question de l'existence d'ensembles infinis tels que les ensembles des parties d'un ensemble infini, par exemple.

Dans le cas où $Y = \{0,1\}$, Friedman a montré que, pour prouver la détermination des éléments de $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, pour un certain $\alpha < \omega_1$, il fallait pouvoir construire $Pow_\alpha(\omega)$, où $Pow_\alpha(\omega)$ est la α^{eme} puissance itérée de ω.

Voyons à présent à quoi peut servir en pratique la notion de détermination (la remarque a été lue dans [KEC94]).

5.2 Détermination et quantification

Commençons par traduire, pour un jeu $\mathcal{G}_X(A)$, la phrase « I a une stratégie gagnante dans $\mathcal{G}_X(A)$ ». On peut l'écrire :

$$\exists x_0, \forall x_1, \exists x_2, \forall x_3, ..., (x_n)_{n<\omega} \in A.$$

De même, on a :

$$\text{« II a une stratégie gagnante dans } \mathcal{G}_X(A) \text{ »} \Longleftrightarrow \forall x_0, \exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, ..., (x_n)_{n<\omega} \notin A.$$

Dire que le jeu $\mathcal{G}_X(A)$ possède une stratégie gagnante revient donc à dire que :

$$(\exists x_0, \forall x_1, \exists x_2, \forall x_3, ..., (x_n)_{n<\omega} \in A) \vee (\forall x_0, \exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, ..., (x_n)_{n<\omega} \notin A) .$$

Or, on a déjà remarqué que I et II ne peuvent pas avoir simultanément une stratégie dans un même jeu. Ainsi, dire que $\mathcal{G}_X(A)$ est déterminé revient donc a dire :

$$((\exists x_0, \forall x_1, \exists x_2, \forall x_3, ..., (x_n)_{n<\omega} \in A) \wedge \neg (\forall x_0, \exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, ..., (x_n)_{n<\omega} \notin A))$$

$$\vee (\neg (\exists x_0, \forall x_1, \exists x_2, \forall x_3, ..., (x_n)_{n<\omega} \in A) \wedge (\forall x_0, \exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, ..., (x_n)_{n<\omega} \notin A)) ,$$

Soit :

$$\neg (\exists x_0, \forall x_1, \exists x_2, \forall x_3, ..., (x_n)_{n<\omega} \in A) \Longleftrightarrow (\forall x_0, \exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, ..., (x_n)_{n<\omega} \notin A) .$$

On a donc un analogue infini à la formule (où $n < \omega$, P représente une proposition logique, $Q \in \{\exists, \forall\}$ et $\check{\exists} x \Longleftrightarrow \forall x$ et $\check{\forall} x \Longleftrightarrow \exists x$) :

$$\neg (\exists x_0, \forall x_1, \exists x_2, \forall x_3, ..., Q x_n, P(\{x_j\}_{j\leq n})) \Longleftrightarrow \big(\forall x_0, \exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, ..., \check{Q} x_n, P(\{x_j\}_{j\leq n})\big) .$$

Remarque Cette dernière assertion correspond à la détermination d'un jeu fini, lié à la proposition P, qui sont donc tous déterminés ! (on s'arrête au n^{eme} coup dans le jeu infini).

5.3 Hiérarchie de Wadge

Voyons enfin une application à la détermination des boréliens à travers la hiérarchie de Wadge.

Définition 5.3.1 *Réduction continue.* Soient E et F deux espaces topologiques, $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. On appelle réduction continue de A vers B une application continue $f : E \longrightarrow F$ telle que $A = f^{-1}(B)$. S'il existe une telle réduction, on note $A \leq_W B$. Si de plus, il n'existe pas de réduction continue de B vers A, on notera $A <_W B$. Enfin, s'il existe deux réductions continues respectivement de A vers B et de B vers A, on notera $A \equiv_W B$.

Ainsi, si $B \leq_W C$, la topologie sur C est plus fine que celle sur B (celle sur B est plus "simple").

On se place maintenant dans le cadre de l'espace topologique des suites infinies sur un ensemble à plus de 2 éléments Y.

Lemme 5.3.1 La relation $\leq_W$ est un préordre sur les parties de Y^ω.

Preuve. Il suffit de montrer que $\leq_W$ est réflexive et transitive :

— Réflexivité : Soit $A \subseteq Y^\omega$. L'identité convient bien, car elle est continue, et l'image inverse de A par celle-ci est bien A, d'où $A \leq_W A$.

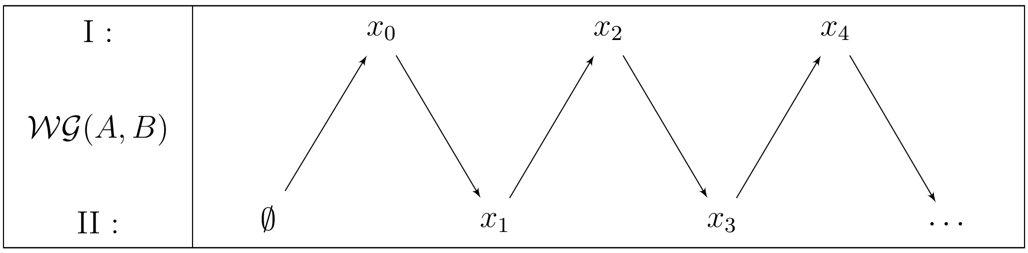
— Transitivité : Soient A, B, C des parties de Y^ω telles que $A \leq_W B$ et $B \leq_W C$. Il existe donc deux applications continues f et g allant de Y^ω dans lui-même telles que $A = f^{-1}(B)$ et $B = g^{-1}(C)$. On a donc $A = (g \circ f)^{-1}(C)$ avec $g \circ f$ continue, donc on a bien $A \leq_W C$, d'où le résultat.

□

Affinons un peu plus notre étude : on s'intéressera, à partir de maintenant, seulement aux boréliens de Y^ω, ce qui va nous permettre d'utiliser leur détermination pour prouver le lemme suivant :

Lemme 5.3.2 (Wadge) Soient X et Z deux arbres sur Y, et $A \subseteq \mathcal{F}(X)$ et $B \subseteq \mathcal{F}(Z)$ deux boréliens. Alors, soit $A \leq_W B$, soit $B \leq_W (\mathcal{F}(X) \setminus A)$.

Preuve. On considère pour cela le jeu de Wadge $\mathcal{WG}(A, B)$:



Les règles sont les suivantes :

— I construit la suite des $(x_{2j})_{j<\omega} \in \mathcal{F}(X)$,

— II construit la suite des $(x_{2j+1})_{j<\omega} \in \mathcal{F}(Z)$,

— II gagne si et seulement si $((x_{2j})_{j<\omega} \in A \Longleftrightarrow (x_{2j+1})_{j<\omega}) \in B)$.

Supposons dans un premier temps que les jeux de Wadge sur les boréliens soient déterminés.

Cas 1. Supposons que II possède une stratégie gagnante τ. On peut alors voir cette stratégie comme une application monotone $\varphi \ : \ X \longleftarrow Z$ qui conserve la longueur.

Elle induit donc une application continue allant de $\mathcal{F}(X)$ dans $\mathcal{F}(Z)$, que l'on notera également, par abus, φ. Par définition d'une stratégie gagnante, on a donc :

$$(x_{2j})_{j<\omega} \in A \Longleftrightarrow \varphi((x_{2j})_{j<\omega}) \in B,$$

d'où :

$$A = \varphi^{-1}(B).$$

On a donc bien $A \leq_W B$.

Cas 2. Si c'est I qui a une stratégie gagnante, en remarquant que I gagne si et seulement si $((x_{2j})_{j<\omega} \notin A \Longleftrightarrow (x_{2j+1})_{j<\omega} \in B)$, on se retrouve dans le premier cas (au premier coup près), avec $A' = Y$ et $B' = \mathcal{F}(X) \setminus A$, qui sont bien toujours des boréliens (donc le jeu est par hypothèse déterminé).

Il ne reste plus qu'à prouver que si A et B sont des boréliens, alors $\mathcal{WG}(A, B)$ est bien déterminé. Pour cela, on va montrer qu'il est en fait équivalent à un jeu de Gale-Stewart $\mathcal{G}_L(M)$ où L et M sont à déterminer.

Introduisons pour cela les projections p_p et p_i allant de $Y^{<\omega}$ dans lui-même : pour $(x_j)_{j\leq n} \in Y^{<\omega}$:

$$p_p\left((x_j)_{j\leq n}\right) = (x_{2j})_{j\leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

Et

$$p_p\left((x_j)_{j\leq n}\right) = (x_{2j+1})_{j\leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}.$$

Ces deux applications sont monotones, et induisent sur Y^ω les applications continues suivantes (portant le même nom par abus) :

$$p_p\left((x_j)_{j<\omega}\right) = (x_{2j})_{j<\omega}$$

Et

$$p_p\left((x_j)_{j<\omega}\right) = (x_{2j+1})_{j<\omega}.$$

Alors, si on définit

$$L := p_p^{-1}(X) \cap p_i^{-1}(Z),$$

On impose les deux premières règles du jeu de Wadge. De plus, si on se donne

$$M := \{x \in L, (p_p(x) \in A \wedge p_i(x) \in B) \vee (p_p(x) \notin A \wedge p_i(x) \notin B)\},$$

On impose la troisième règle. Le jeu $\mathcal{GW}(A, B)$ peut donc être vu comme le jeu $\mathcal{G}_L(M)$.

Les projections étant continues et A et B étant des boréliens, il est clair que M est un borélien de $\mathcal{F}(L)$. Le jeu $\mathcal{G}_L(M)$ est donc déterminé, et il en est bien de même pour le jeu $\mathcal{GW}(A, B)$.

$\square$

Il existe une preuve de ce Lemme qui n'utilise pas la détermination de boréliens (proposée par Louveau et Saint-Raymond), mais, d'après Martin, elle est « beaucoup plus longue et complexe que la combinaison des preuves de la détermination des boréliens et du Lemme de Wadge » [1].

Ayant affaire à un préordre, $\equiv_W$ est une relation d'équivalence. Ses classes sont notées $[X]_W$, et appelées *degrés de Wadge*. La relation $\leq_W$ induit alors une relation $\leq$ sur les degrés de Wadge :

$$[X]_W \leq [Y]_W \Longleftrightarrow X \leq_W Y.$$

Cette nouvelle relation garde en particulier la propriété de préordre. C'est même un ordre partiel, car elle est anti-symétrique : si on se donne $[X]_W$ et $[Y]_W$ deux degrés de Wadge, on a en effet :

$$(([X]_W \leq [Y]_W) \wedge ([Y]_W \leq [X]_W)) \Longleftrightarrow ((X \leq_W Y) \wedge (Y \leq_W X))$$

$$\Longleftrightarrow X \equiv_W Y \Longleftrightarrow [X]_W \equiv [Y]_W.$$

On n'a pas encore affaire à un ordre total, mais, d'après le Lemme de Wadge, on s'en rapproche : montrons en effet que pour un degré de Wadge $[X]_W$ donné, celui-ci est comparable avec tous les autres, sauf $[A^\omega \backslash X]_W$, s'ils ne sont pas identiques.

Prenons donc un degré de Wadge $[Y]_W$ différent de $[X]_W$. Le Lemme de Wadge permet d'affirmer :

$$(X \leq_W Y) \vee (A^\omega \backslash Y \leq_W X)$$

Et

$$(Y \leq_W X) \vee (A^\omega \backslash X \leq_W Y).$$

Ainsi, comme on les a pris différents, $[X]_W$ et $[Y]_W$ ne sont pas comparables si et seulement si :

$$(A^\omega \backslash Y \leq_W X) \wedge (A^\omega \backslash X \leq_W Y),$$

Ce qui veut exactement dire

$$A^\omega \backslash X \equiv_W Y,$$

Car, par définition de la réduction continue,

$$A^\omega \backslash Y \leq_W X \Longleftrightarrow Y \leq_W A^\omega \backslash X.$$

1. Voir [DO98]

Pour construire un ordre total, il suffit donc "d'épaissir" (rendre plus grossier) la relation d'équivalence, par exemple en définissant :

$$X \equiv_W^* Y \Longleftrightarrow ((X \equiv_W Y) \vee (X \equiv_W A^\omega \setminus Y))$$

Les classes d'équivalence sont alors les :

$$[X]_W^* := [X]_W \cup [A^\omega \setminus X]_W$$

On note $\mathbf{W}^*$ l'ensemble de ces classes, et l'ordre induit est :

$$([X]_W^* \leq_W^* [Y]_W^* \Longleftrightarrow X \leq_W Y) \vee (X \leq_W A^\omega \setminus Y)\,.$$

D'après ce qui précède, on a construit un ordre total ! Cet ordre sur les degrés de Wadge est appelé *Hiérarchie de Wadge* (qui s'applique en particulier aux classes additives et multiplicatives de la Hiérarchie de Borel, ce qui permet de nettement l'affiner).

On peut terminer en citant le théorème suivant :

Théorème 5.3.1 (Wadge et Martin) La relation d'ordre $\leq_W^*$ sur $\mathbf{W}^*$ est un bon ordre.

Bibliographie

[DO98] H.G. DALES and G. OLIVERI. *Truth in mathematics.* Oxford University Press, 1998. p.226.

[FOU09] Kevin FOURNIER. De la détermination des jeux infinis. Master's thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2009.

[GRI77] Serge GRIGORIEFF. Détermination des jeux boréliens et problèmes logiques associés. *Séminaire N. Bourbaki, exp. No. 478*, 1977. `http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__122_0`.

[GS53] D. GALE and F.M. STEWART. Infinite games with perfect information, Contribution to the theory of games. *Annals of Math. Studies, No. 28*, 1953.

[JEC03] Thomas JECH. *Set theory.* Springer, 2003. Chapitres 1-2-4-9-11. 3rd Edition.

[KEC94] Alexander S. KECHRIS. *Classical Descriptive Set Theory.* Springer-Verlag, 1994. Section 20, p.137-148.

[MAR75] Donald A. MARTIN. Borel determinacy. *Annals of Mathematics, Second Series, Vol.102, No. 2, p.363-371*, Sept. 1975.

[MAR85] Donald A. MARTIN. A purely inductive proof of Borel determinacy. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, No. 42, p.303-308*, 1985.