



école
normale
supérieure



ENS DE RENNES
UNIVERSITÉ RENNES 1

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
STAGE DE L3

Uniformisation des surfaces de Riemann

Élève :
Sébastien MACÉ

Enseignant :
Rachid REGBAOUI



école
normale
supérieure

Table des matières

1	Introduction	2
2	Préliminaire sur les surfaces	2
2.1	Surface et courbures	2
2.2	Intégration sur une surface	11
3	L'équation $\Delta_g u - e^u = \varphi$	12
3.1	La surface et l'équation	12
3.2	Notion de dérivée faible	14
3.3	La structure fonctionnelle	16
3.4	Le cas des fonctions constantes	18
4	Résolution par méthode directe	18
4.1	La topologie faible dans le cas hilbertien	18
4.2	Application	22
5	La méthode de Poincaré	25
6	Conclusion	26

Table des figures

1	La lemniscate épaissie	4
2	Tore à 2 trous	13
3	Tore à 3 trous	13
4	Sphère à 3 trous	13

1 Introduction

Le théorème d'uniformisation de Riemann est l'un des résultats les plus importants du XIX^{ème} siècle en mathématiques [5] :

Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe au plan, au disque ou à la sphère.

La démonstration, indépendamment par Poincaré et Koebe en 1907, de ce théorème constitue le vingt-deuxième problème de Hilbert.

L'objectif de ce mémoire est la démonstration, par la résolution de l'équation différentielle

$$\Delta_g u - e^u = \varphi,$$

où φ est de moyenne strictement négative sur la surface, du cas particulier des surfaces de Riemann compactes de genre supérieur ou égal à 2 de ce théorème.

2 Préliminaire sur les surfaces

Dans ce premier chapitre, nous allons définir le concept de surface et donner divers théorèmes qui permettront d'introduire l'équation. On se référera à [4] et [1] pour plus de détails.

2.1 Surface et courbures

Définition 1. Une surface S est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 non vide tel que pour tout point p de S , il existe un ouvert V de \mathbb{R}^2 , un voisinage ouvert U de p relatif à S et une application différentiable X de V dans \mathbb{R}^3 tels que :

- i $X(V) = U$
- ii X est un homéomorphisme
- iii pour tout point q de V , la différentielle de X en q , $(dX)_q$ est injective

L'application X est appelé paramétrisation de la surface au voisinage de p , elle exprime des coordonnées $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de S en fonction des coordonnées (u, v) de U .

Nous nous restreignons au cas des surfaces de \mathbb{R}^3 , dans le cas général une surface est un espace topologique vérifiant les conditions ci-dessus.

Définition 2. Une carte locale d'un espace topologique X sur \mathbb{R}^2 est la donnée d'un couple (U, Φ) où :

- U est un ouvert de X
- Φ est une application de U dans \mathbb{R}^2 telle que $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ soit un homéomorphisme.

L'application réciproque $\Phi^{-1} : \Phi(U) \rightarrow U$ est la paramétrisation de U , et les coordonnées locales des points de U sont leurs images par Φ .

Définition 3. On appelle surface riemannienne un espace topologique S connexe et séparé muni d'un atlas $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ où :

- $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est un recouvrement de S par des ouverts
- pour tout $\lambda \in \Lambda$, φ_λ est un homéomorphisme de U_λ vers un ouvert V_λ de \mathbb{C}
- pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$ est un difféomorphisme entre $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ et $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$.

De plus, si pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$ est un biholomorphisme entre $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ et $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$, alors on qualifie S de surface de Riemann.

Théorème 4. Toute surface riemannienne admet un atlas lui donnant une structure de surface de Riemann.

Proposition 5. Soient $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $S = f^{-1}(\{0\})$.

Si le gradient de f ne s'annule pas sur S alors S est une surface de Riemann.

Exemple 6. On s'intéresse à la sphère $\mathbb{S}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \right\}$.

On la recouvre par les ouverts $S_N = \mathbb{S}^2 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $S_S = \mathbb{S}^2 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On définit alors les fonctions suivantes :

$$\Phi_N : S_N \rightarrow \mathbb{C}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \frac{X + iY}{1 - Z} \text{ et } \Phi_S : S_S \rightarrow \mathbb{C}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \frac{X - iY}{1 + Z}.$$

L'application Φ_N est un homéomorphisme entre S_N et \mathbb{C} , d'inverse

$$\Phi_N^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S_N, z = x + iy \mapsto \frac{1}{r^2 + 1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ r^2 - 1 \end{pmatrix}$$

et l'application Φ_S est un homéomorphisme entre S_S et \mathbb{C} , d'inverse

$$\Phi_S^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S_S, z = x + iy \mapsto \frac{1}{r^2 + 1} \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 - r^2 \end{pmatrix}$$

avec r le module de la variable z .

L'ensemble $S_N \cap S_S$ a pour image $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par Φ_N et par Φ_S , de plus, $\Phi_S \circ \Phi_N^{-1}$ et $\Phi_N \circ \Phi_S^{-1}$ sont toute les deux égales à la fonction inverse ($z \mapsto \frac{1}{z}$) qui est un biholomorphisme de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur lui-même.

Ainsi la sphère a bien une structure de surface de Riemann.

Exemple 7. On s'intéresse au plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

On définit alors la fonction

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto X + iY.$$

L'application Φ est un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ et \mathbb{C} , d'inverse

$$\Phi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}, z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi le plan a bien une structure de surface de Riemann.

Exemple 8. On s'intéresse à la lemniscate de Bernoulli d'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

dans le plan que l'on épaissit de $r = 0.1$ pour obtenir une surface S d'équation

$$((x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2)^2 + z^2 = r^2.$$

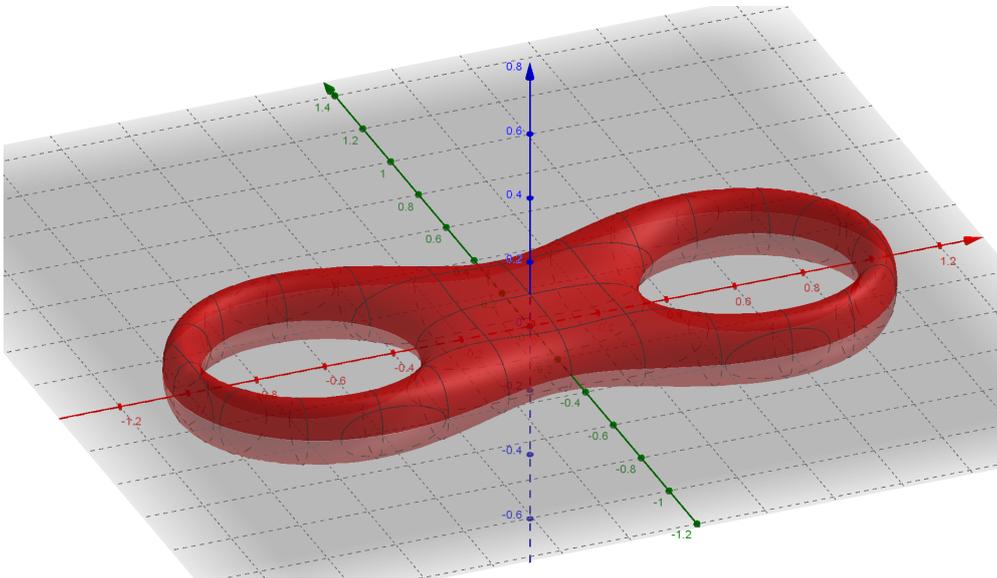


FIGURE 1 – La lemniscate épaissie

On note ρ l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $\rho(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$.
On appelle f l'application continûment différentiable sur \mathbb{R}^3 telle que $S = f^{-1}(\{0\})$,

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \rho(x, y)^2 + z^2 - r^2.$$

En tout point (x, y, z) de l'espace, son gradient est

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x(x^2 + y^2 - \frac{1}{2})\rho(x, y) \\ 8y(x^2 + y^2 + \frac{1}{2})\rho(x, y) \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Le gradient ne s'annule que dans le plan $\{z = 0\}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, y, 0) \in S$, on a

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ c'est-à-dire } \rho(x, y)^2 = r^2 \neq 0.$$

Ainsi, par l'expression de la deuxième coordonnée du gradient, si $y \neq 0$, le gradient est non nul au point $(x, y, 0)$ et si $y = 0$ alors $\rho(x, 0)^2 = x^4(x^2 - 1)^2 = r^2$ ce qui implique que x est non nul. L'expression de la première coordonnée du gradient donne alors

$$(\nabla f)_1 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 8xr^2(x^2 - \frac{1}{2})\rho(x, 0) \neq 0,$$

car on ne peut avoir simultanément $x^2 = \frac{1}{2}$ et $\rho(x, 0)^2 = r^2$.

Le gradient de f ne s'annule donc pas sur la surface S et, par la proposition 5, cette surface est une surface de Riemann.

Définition 9. Un vecteur v de \mathbb{R}^3 est dit tangent à une surface S en un point $p \in S$ s'il existe un réel strictement positif ε et une courbe paramétrée $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tels que $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = v$.

On note $T_p S$ l'ensemble des points tangents à une surface S au point p . Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension 2 comme le montre la proposition 14.

Définition 10. Soit S une surface. Une application f de S dans \mathbb{R}^m est dite différentiable si pour toute paramétrisation X de S l'application $f \circ X$ est différentiable comme application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^m .

Dans ce cas, la différentielle de f en un point $p \in S$ s'écrit :

$$(df)_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^m, v \mapsto (f \circ \alpha)'(0),$$

où α est une courbe paramétrée associée à v .

La valeur de la différentielle ne dépend pas de la courbe choisie.

Définition 11. Un champ vectoriel est une fonction différentiable $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Il est dit tangent si $V(p) \in T_p S$ pour tout $p \in S$, normal si $V(p)$ est orthogonal à $T_p S$ pour tout $p \in S$ et unitaire si $V(p) \in \mathbb{S}^2$ pour tout $p \in S$.

Définition 12. On appelle métrique sur une surface de Riemann S , une application g , de classe $C^\infty(S)$, qui à un point $p \in S$ associe un produit scalaire sur $T_p S$, c'est-à-dire :

— pour tout point p de S , $g(p)$ est un produit scalaire sur $T_p S$,

— pour tous champs tangents infiniment différentiables X et Y , l'application

$$p \mapsto g(p)(X(p), Y(p))$$

est infiniment différentiable sur S .

Deux métriques g et \tilde{g} sur une même surface S sont dites conformes s'il existe une application w de S infiniment différentiable dans \mathbb{R} et strictement positive telle que $\tilde{g} = w \cdot g$.

Une métrique g est compatible avec la structure complexe si pour tout carte (U, φ) de l'atlas de S , la métrique $g \circ \varphi^{-1}$ est conforme à la métrique euclidienne sur l'ouvert $\varphi(U)$ du plan \mathbb{C} .

Théorème 13. Toute surface de Riemann admet une métrique compatible avec la structure complexe.

Proposition 14. Soient S une surface, p un point de S et $X : U \rightarrow S$ une paramétrisation de S avec $p \in X(U)$. Alors

$$T_p S = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2).$$

La linéarité et l'injectivité de $(dX)_{X^{-1}(p)}$ assurent donc que $T_p S$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Définition 15. Une surface S est dite orientable si elle admet un champ unitaire normal N sur toute sa surface. On appelle application de Gauss un tel champ.

Dans ce cas, la différentielle de N en un point $p \in S$ est $(dN)_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$, or $N(p)$ est un vecteur normal au plan tangent à la sphère unité au point $N(p)$ qui coïncide donc avec le plan tangent à la surface S au point p . L'application $(dN)_p$ est donc un endomorphisme de $T_p S$.

On peut alors définir la courbure moyenne H et la courbure de Gauss K au point p de S par :

$$H(p) = -\frac{1}{2} \text{tr}((dN)_p) \text{ et } K(p) = \det((dN)_p)$$

De plus le polynôme caractéristique de $-(dN)_p$ est $\chi_{-(dN)_p} = X^2 - 2H(p)X + K(p)$, on note $k_1 \leq k_2$ ses racines que l'on nomme courbures principales de S en p .

Définition 16. Soit (S, g) une surface de Riemann muni d'une métrique compatible avec la structure complexe.

On dispose d'une fonction $u \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ telle que $g = e^u dzd\bar{z}$, où $dzd\bar{z}$ désigne le produit scalaire euclidien canonique de \mathbb{R}^2 .

On appelle courbure de Gauss associée à g , la fonction

$$K_g : S \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto (-\Delta u(p) + K(p)) e^{-u(p)}.$$

Exemple 17. On reprend l'exemple l'exemple 6 de la sphère.

Pour tout point $p \in \mathbb{S}^2$, p est normal au plan tangent $T_p S$ donc l'identité est une application de Gauss pour la sphère. La sphère admet alors pour courbure de Gauss, la fonction constante égale à 1.

Exemple 18. On reprend l'exemple l'exemple 7 du plan.

Pour tout point $p \in \mathbb{S}^2$, le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan tangent $T_p S \approx S$ donc le plan admet alors pour courbure de Gauss, la fonction constante égale à 0.

Exemple 19. On reprend l'exemple 8 de la lemniscate.

On peut paramétrer la partie supérieure S_+ de S par l'application

$$\Phi : \mathbb{D}_+ \rightarrow S_+, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{r^2 - \rho(x, y)^2} \end{pmatrix},$$

$$\text{où } \mathbb{D}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (\rho(x, y))^2 < r^2 \right\}.$$

Les dérivées partielles de Φ sont

$$\Phi_x : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{2x \rho(x, y)(2(x^2 + y^2) - 1)}{\sqrt{r^2 - \rho(x, y)^2}} \end{pmatrix} \text{ et } \Phi_y : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2y \rho(x, y)(2(x^2 + y^2) + 1)}{\sqrt{r^2 - \rho(x, y)^2}} \end{pmatrix}.$$

On définit alors les applications a , f_x et f_y de \mathbb{D}_+ dans \mathbb{R} tels que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_+$, on a :

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \sqrt{r^2 - \rho(x, y)^2}, \\ f_x(x, y) &= 2x \rho(x, y) (2(x^2 + y^2) - 1) \text{ et} \\ f_y(x, y) &= 2y \rho(x, y) (2(x^2 + y^2) + 1). \end{aligned}$$

Les dérivées partielles sont s'écrivent alors, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_+$:

$$\Phi_x(x, y) = \frac{1}{a(x, y)} \begin{pmatrix} a(x, y) \\ 0 \\ -f_x(x, y) \end{pmatrix} \text{ et } \Phi_y(x, y) = \frac{1}{a(x, y)} \begin{pmatrix} 0 \\ a(x, y) \\ -f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Puisque l'application $\Phi_N : \mathbb{D}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \\ a(x, y) \end{pmatrix}$ est une application qui associe aux coordonnées locales $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur tangent à la surface au point $\Phi(x, y)$, l'application N définie par

$$N : S_+ \rightarrow \mathbb{S}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M(x, y, z) \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \\ z \end{pmatrix},$$

où $M : S_+ \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + z^2}}$, est une application de Gauss sur S_+ .

En notant

$$h_x : S_+ \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f_x(x, y) \frac{\partial f_x}{\partial x}(x, y) + f_y(x, y) \frac{\partial f_y}{\partial x}(x, y) \text{ et}$$

$$h_y : S_+ \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f_x(x, y) \frac{\partial f_x}{\partial y}(x, y) + f_y(x, y) \frac{\partial f_y}{\partial y}(x, y),$$

la matrice Jacobienne de l'application différentiable N est, au point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S_+ :$

$$\begin{aligned}
 J(x, y, z) = & M(x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_x}{\partial y}(x, y) & 0 \\ \frac{\partial f_y}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_y}{\partial y}(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & - M(x, y, z)^2 \begin{pmatrix} h_x(x, y) N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & h_y(x, y) N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & z N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ce qui permet de calculer la courbure de Gauss $K = \det(J)$.

Définition 20. Soient S une surface de Riemann muni d'une métrique g , p_0 un point de S et $X : U \rightarrow S$ une paramétrisation de S au voisinage de p_0 .

En notant $X_1 = \partial_1 X$ et $X_2 = \partial_2 X$ ses dérivées partielles, pour tout $q \in U$, une base de $T_p S$ est $(X_1(q), X_2(q))$ où $p = X(q)$.

On note $G : U \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'application telle que pour tout $q \in U$ et $u, v \in T_p S$ on a

$$g(p)(u, v) = \tilde{u}^T G(q) \tilde{v},$$

où \tilde{u} désigne le vecteur coordonné de u dans la base $(X_1(q), X_2(q))$.

On a alors

$$G(q) = \begin{pmatrix} g(p)(X_1(q), X_1(q)) & g(p)(X_1(q), X_2(q)) \\ g(p)(X_2(q), X_1(q)) & g(p)(X_2(q), X_2(q)) \end{pmatrix}.$$

On note alors $(g_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}}$ ses composantes. On définit de même $(g^{i,j})_{i,j \in \{1,2\}}$ les composantes de l'inverse de G .

Exemple 21. On reprend l'exemple 6 de la sphère.

On note Ψ la réciproque de l'application Φ_N , et Ψ_x, Ψ_y ses dérivées partielles.

On a alors

$$\Psi_x : \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \frac{2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} y^2 + 1 - x^2 \\ -2xy \\ 2x \end{pmatrix}$$

et

$$\Psi_y : \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \frac{2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} -2xy \\ x^2 + 1 - y^2 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

On munissant \mathbb{S}^2 de la métrique euclidienne canonique, on obtient alors

$$\|\Psi_x\|^2 = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \|\Psi_y\|^2 = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \text{ et } \langle \Psi_x | \Psi_y \rangle = 0.$$

La matrice de la métrique est donc sur S_N

$$G = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La métrique est donc conforme à la structure complexe.

Exemple 22. On reprend l'exemple 7 du plan.

On dispose d'une paramétrisation du plan

$$\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}, z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

et de Ψ_x, Ψ_y ses dérivées partielles. On a alors

$$\Psi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Psi_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On munissant $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ de la métrique euclidienne canonique, on obtient alors

$$\|\Psi_x\|^2 = 1, \|\Psi_y\|^2 = 1 \text{ et } \langle \Psi_x | \Psi_y \rangle = 0.$$

La matrice de la métrique est donc, sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 23. On reprend l'exemple 8 de la lemniscate avec la paramétrisation Φ de S_+ .

On rappelle l'expression des dérivées partielles de Φ :

$$\Phi_x : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{2x \rho(x,y)(2(x^2+y^2)+1)}{\sqrt{r^2-\rho(x,y)^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{a(x,y)} \begin{pmatrix} a(x,y) \\ 0 \\ -f_x(x,y) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\Phi_y : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2y \rho(x,y)(2(x^2+y^2)+1)}{\sqrt{r^2-\rho(x,y)^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{a(x,y)} \begin{pmatrix} 0 \\ a(x,y) \\ -f_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne les coefficients de la matrice de la métrique euclidienne, au point $(x, y) \in \mathbb{D}_+$

$$\|\Phi_x\|^2 = 1 + \frac{4x^2 \rho(x, y)^2 (2(x^2 + y^2) - 1)^2}{r^2 - \rho(x, y)^2} = 1 + \left(\frac{f_x(x, y)}{a(x, y)} \right)^2,$$

$$\|\Phi_y\|^2 = 1 + \frac{4y^2 \rho(x, y)^2 (2(x^2 + y^2) + 1)^2}{r^2 - \rho(x, y)^2} = 1 + \left(\frac{f_y(x, y)}{a(x, y)} \right)^2 \text{ et}$$

$$\langle \Phi_x | \Phi_y \rangle = \frac{4xy \rho(x, y)^2 (2(x^2 + y^2) + 1) (2(x^2 + y^2) - 1)}{r^2 - \rho(x, y)^2} = \frac{f_x(x, y) f_y(x, y)}{a(x, y)^2}.$$

Fixons $(x, y) \in \mathbb{D}_+$.

On a alors deux cas :

- soit $f_x(x, y) f_y(x, y) = 0$ alors la matrice $G(x, y)$ est symétrique,
- soit $f_x(x, y)$ et $f_y(x, y)$ sont non nuls alors on peut diagonaliser la matrice symétrique réelle $G(x, y) = P(x, y) D(x, y) P(x, y)^{-1}$ avec

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a(x, y)^2 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}{a(x, y)^2} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$P(x, y) = \frac{1}{\sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}} \begin{pmatrix} -f_y(x, y) & f_x(x, y) \\ f_x(x, y) & f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Définition 24. Soient S une surface de Riemann muni d'une métrique g et u une application différentiable sur S .

On note alors $\nabla_g u$ le gradient de u par rapport par la métrique g dont les composantes sont

$$(\nabla_g u)_i = \sum_{j \in \{1, 2\}} g^{i, j} \partial_j u.$$

En tout point $p \in S$, le gradient de u au point p est un vecteur de $T_p S$.

Si u est de plus deux fois différentiable, alors on définit son Laplacien par rapport à la métrique g

$$\Delta_g u = \frac{1}{\det g} \sum_{i, j \in \{1, 2\}} \partial_i \left(g^{i, j} \sqrt{\det G} \partial_j u \right)$$

Proposition 25. Soient (S, g) une surface de Riemann muni d'une métrique g compatible avec la structure complexe et \tilde{g} une métrique sur S conforme à g . Alors pour toute fonction v deux fois différentiable sur S , on a

$$\Delta_{\tilde{g}} v = e^{-u} \Delta_g v.$$

Proposition 26. Soient (S, g) une surface de Riemann muni d'une métrique g compatible avec la structure complexe et \tilde{g} une métrique sur S conforme à g .

On dispose d'une fonction $u \in C^\infty(S, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\tilde{g} = e^u g$. On a alors

$$K_{\tilde{g}} = (-\Delta_g u + K_g) e^{-u}.$$

2.2 Intégration sur une surface

Définition 27. Soit S une surface de Riemann orientée.

On nomme région tout sous-ensemble \mathcal{R} de S ouvert et relativement compact.

Dans le cas où S est compacte, S est une région d'elle même.

Définition 28. Soient \mathcal{R} une région d'une surface de Riemann orientable S muni d'une métrique g et (U, Φ) une carte locale de S telle que $\mathcal{R} \subset U$.

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur \mathcal{R} si

$$\tilde{f} : \Phi(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f \cdot \Phi^{-1}(p)$$

est intégrable sur $\Phi(\mathcal{R})$. On note alors son intégrale :

$$\int_{\mathcal{R}} f dV_g = \int_{\Phi(\mathcal{R})} \tilde{f} d\mu,$$

où $d\mu = \sqrt{\det(G(x, y))} dx dy$.

La valeur de l'intégrale précédente ne dépend pas de la carte locale.

Proposition 29. Soient \mathcal{R} une région d'une surface de Riemann orientable S muni d'une métrique g .

Les propriétés suivantes sont vraies :

1. l'intégration sur \mathcal{R} est linéaire et monotone,
2. toute fonction continue sur $\overline{\mathcal{R}}$ est intégrable sur \mathcal{R} ,
3. pour toute sous-région \mathcal{R}' de \mathcal{R} et toute fonction h intégrable sur \mathcal{R} et nulle sur $(\mathcal{R} - \mathcal{R}')$, on a :

$$\int_{\mathcal{R}} h dV_g = \int_{\mathcal{R}'} h dV_g,$$

4. pour toute sous-région \mathcal{R}' de \mathcal{R} telle que $(\mathcal{R} - \mathcal{R}')$ est une union finie de courbes et de points de S et toute fonction h intégrable sur \mathcal{R} , on a :

$$\int_{\mathcal{R}} h dV_g = \int_{\mathcal{R}'} h dV_g.$$

De plus les théorèmes de convergence et les théorèmes de continuité et de différentiabilité par rapport aux paramètres restent vrais sous les mêmes conditions.

Définition 30. On appelle aire d'une région \mathcal{R} une région d'une surface de Riemann orientable S muni d'une métrique g , le réel positif

$$A(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} 1 dV_g.$$

Théorème 31 (Formule de Green). Soient une surface de Riemann orientable S muni d'une métrique g et u, v deux fonctions de classe C^2 sur S . On a alors

$$\int_S \nabla_g u \cdot \nabla_g v \, dV_g = - \int_S u \cdot \Delta_g v \, dV_g,$$

où $(\nabla_g f_1 \cdot \nabla_g f_2)(p) = g(p)(\nabla_g f_1, \nabla_g f_2)$, pour tout $p \in S$.

Théorème 32. Gauss-Bonnet

Pour toute surface de Riemann compacte et orientable S , il existe un entier $\chi(S)$ tel que :

- s'il existe un difféomorphisme entre deux surfaces S_1 et S_2 alors $\chi(S_1) = \chi(S_2)$,
- pour toute métrique g sur S : $\int_S K_g \, dV_g = 2\pi\chi(S)$.

On nomme caractéristique d'Euler cet entier.

Définition 33. On appelle genre d'une surface de Riemann S compacte, connexe, orientable et sans bord, le nombre maximal de découpage de la surface sans perdre la connexité. On note $g(S)$ cet entier naturel.

Le genre et la caractéristique d'Euler d'une surface sont liés par la formule

$$2g(S) + \chi(S) = 2.$$

3 L'équation $\Delta_g u - e^u = \varphi$

Maintenant que nous avons défini les surfaces de Riemann et que nous disposons de théorèmes fondamentaux sur ceux-ci, nous pouvons parvenir à l'équation qui nous intéresse ainsi qu'à sa résolution.

On rappelle le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann qui donne une classification de celles-ci :

Théorème 34. Uniformisation

Toute surface de Riemann simplement connexe est holomorphiquement isomorphe à la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 , au plan complexe \mathbb{C} ou au disque de Poincaré \mathbb{D} .

3.1 La surface et l'équation

Soit S une surface de Riemann compacte, connexe de genre supérieur ou égal à 2, muni d'une métrique g compatible avec la structure complexe.

Soit \tilde{g} une métrique sur S conforme à g .

On dispose d'une application $u \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ telle que $\tilde{g} = e^u g$.

Notons K_g et $K_{\tilde{g}}$ les courbures de Gauss associées à ces métriques. On a, d'après la proposition 26,

$$K_{\tilde{g}} = (-\Delta_g u + K_g) e^{-u}.$$

Une fonction u est une solution de l'équation $\Delta_g u = e^u + K_g$ si et seulement si la métrique $\tilde{g} = e^u g$ donne une courbure constante égale à -1 à la surface S qui est alors holomorphiquement isomorphe au disque \mathbb{D} .

Existe-il une métrique \tilde{g} tel que $K_{\tilde{g}} = -1$? c'est-à-dire une fonction u infiniment dérivable telle que

$$\Delta_g u = e^u + K_g?$$

D'après le théorème de Gauss-Bonnet, la courbure de Gauss K_g est de moyenne strictement négative sur S , ce qui motive la résolution de l'équation

$$\Delta_g u - e^u = \varphi,$$

avec φ de moyenne strictement négative.

L'exemple le plus simple de surface compacte de genre g est le tore à g trous.



FIGURE 2 – Tore à 2 trous

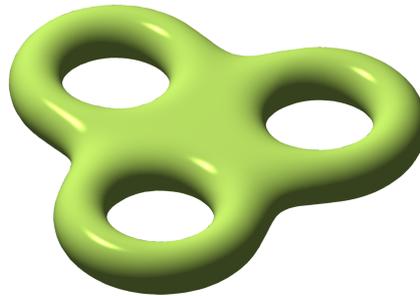


FIGURE 3 – Tore à 3 trous

On peut également construire des surfaces plus exotiques en ajoutant des hanches à une surface convexe.

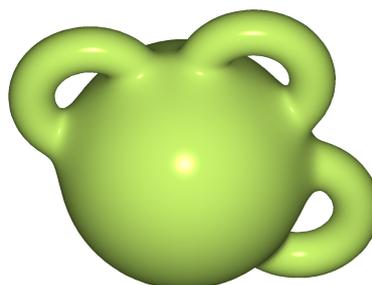


FIGURE 4 – Sphère à 3 trous

3.2 Notion de dérivée faible

Pour résoudre l'équation 1, nous nous plaçons dans le cas favorable d'un espace de Hilbert afin d'exploiter les propriétés de ces espaces. Nous définissons également une notion plus large de différentiabilité.

Définition 35. On note $\mathbb{H}^1(S)$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant l'espace $C^1(S)$ des fonctions continûment différentiables de S dans \mathbb{R} muni du produit scalaire

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : C^1(S)^2 \rightarrow \mathbb{R} : (f_1, f_2) \mapsto \int_S \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 \, dV_g + \int_S f_1 f_2 \, dV_g,$$

où $(\nabla f_1 \cdot \nabla f_2)(p) = g(p)(\nabla f_1, \nabla f_2)$, pour tout $p \in S$.

L'opérateur $\nabla : C^1(S) \rightarrow C^0(S)$, $f \mapsto \nabla f$ se prolonge sur $\mathbb{H}^1(S)$.

Pour tout $f \in \mathbb{H}^1(S)$, on appelle gradient faible de f l'application ∇f , de plus, chacune des composantes de ∇f appartient à $\mathbb{L}^2(S)$.

Proposition 36. Pour tout $u \in \mathbb{H}^1(S)$, on a $|u| \in \mathbb{H}^1(S)$ et $\| |u| \|_{\mathbb{H}^1(S)} = \| u \|_{\mathbb{H}^1(S)}$.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{H}^1(S)$.

Comme u est à valeurs dans \mathbb{R} , on a $u^2 = |u|^2$ et donc $\| u \|_{\mathbb{L}^2(S)} = \| |u| \|_{\mathbb{L}^2(S)}$.

Il est évident que $-u \in \mathbb{H}^1(S)$ et par conséquent $|u|$ admet un gradient faible qui coïncide avec celui de u sur l'ensemble $\{u > 0\} \cup \{u = 0 \ \& \ \nabla u = 0\}$ et celui de $-u$ sur l'ensemble $\{u < 0\}$. L'ensemble $\{u = 0 \ \& \ \nabla u \neq 0\}$ étant de mesure nulle, $|u|$ admet un gradient faible de carré intégrable sur S et on a

$$\begin{aligned} \int_S |\nabla |u||^2 \, dV_g &= \int_{S \cap \{u > 0\}} |\nabla |u||^2 \, dV_g + \int_{S \cap \{u < 0\}} |\nabla |u||^2 \, dV_g \text{ par relation de Chasles,} \\ &= \int_{S \cap \{u > 0\}} |\nabla u|^2 \, dV_g + \int_{S \cap \{u < 0\}} |\nabla(-u)|^2 \, dV_g \text{ par ce qui précède,} \\ &= \int_{S \cap \{u > 0\}} |\nabla u|^2 \, dV_g + \int_{S \cap \{u < 0\}} |\nabla u|^2 \, dV_g \text{ par linéarité du gradient,} \\ \int_S |\nabla |u||^2 \, dV_g &= \int_S |\nabla u|^2 \, dV_g, \end{aligned}$$

en notant $|\nabla v|^2 = \nabla v \cdot \nabla v$, pour tout $v \in \mathbb{H}^1(S)$.

Ce qui achève la proposition. □

On donne le théorème de Rellich qui assure la compacité de l'inclusion de $\mathbb{H}^1(S)$ dans $\mathbb{L}^2(S)$.

Théorème 37. Rellich

De toute suite bornée de $\mathbb{H}^1(S)$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathbb{L}^2(S)$.

On admettra le théorème suivant qui donne l'intégrabilité de l'exponentielle de toute fonction de $\mathbb{H}^1(S)$.

Théorème 38. *Inégalité de Moser-Trudinger [2]*

Il existe une constante réel C_S ne dépendant que de la surface S telle que pour tout $u \in \mathbb{H}^1(S)$, on a

$$\ln \left(\int_S e^{u-\bar{u}} dV_g \right) \leq \frac{1}{16\pi^2} \int_S \|\nabla u\|^2 dV_g + C_S,$$

où $\bar{u} = \frac{1}{A(S)} \int_S u dV_g$ désigne la moyenne de u sur S .

Proposition 39. *Deux conséquences de cette inégalité sont :*

1. il existe une constante réelle C ne dépendant que de la surface S telle que pour tout $u \in \mathbb{H}^1(S)$, on a

$$\int_S e^u dV_g \leq C \exp \left(\left(\frac{1}{16\pi^2} + \frac{1}{2} \right) \|u\|_{\mathbb{H}^1(S)}^2 \right),$$

2. l'application $\phi : u \mapsto \int_S e^u dV_g$ est localement lipschtzienne.

Démonstration. Soient $u, v \in \mathbb{H}^1(S)$ et K un réel qui majore les normes de u et v dans $\mathbb{H}^1(S)$.

1. On a, par définition de la moyenne de u :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{A(S)} \int_S u dV_g, \\ &\leq \frac{1}{A(S)} \left(\int_S 1^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_S u^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}} \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{A(S)}} \|u\|_{L^2(S)}, \\ &\leq \frac{1}{2A(S)} + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(S)}^2 \text{ par l'inégalité de Young,} \\ &\leq \frac{1}{2A(S)} + \frac{1}{2} \|u\|_{\mathbb{H}^1(S)}^2. \end{aligned}$$

Par croissance de l'exponentielle, on a alors

$$\begin{aligned}
 \int_S e^{u-\bar{u}} dV_g &\leq e^{C_S} \exp\left(\frac{1}{16\pi^2} \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(S)}^2\right) \text{ puis} \\
 \int_S e^u dV_g &\leq e^{C_S} \exp\left(\frac{1}{16\pi^2} \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(S)}^2 + \bar{u}\right), \\
 &\leq e^{C_S} \exp\left(\frac{1}{16\pi^2} \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(S)}^2 + \frac{1}{2A(S)} + \frac{1}{2} \|u\|_{\mathbb{L}^2(S)}^2\right), \\
 &\leq C \exp\left(\left(\frac{1}{16\pi^2} + \frac{1}{2}\right) \|u\|_{\mathbb{H}^1(S)}^2\right),
 \end{aligned}$$

avec $C = \exp\left(C_S + \frac{1}{2A(S)}\right)$.

2. Par le théorème des accroissements finis, pour tout réel a, b , il existe c compris entre a et b tel que $e^a - e^b = e^c(a - b)$ et par croissance de l'exponentielle, on a

$$|e^a - e^b| \leq e^{|a|+|b|} |a - b|.$$

On a ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la première conséquence :

$$\begin{aligned}
 |\phi(u) - \phi(v)| &\leq \int_S |e^u - e^v| dV_g, \\
 &\leq \int_S e^{|u|+|v|} |u - v| dV_g, \\
 &\leq \left(\int_S e^{2|u|+2|v|} dV_g\right)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_{\mathbb{L}^2(S)}, \\
 &\leq \left(\int_S e^{4|u|} dV_g\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_S e^{4|v|} dV_g\right)^{\frac{1}{4}} \|u - v\|_{\mathbb{L}^2(S)}, \\
 &\leq \left(C \exp\left[\left(\frac{1}{\pi^2} + 8\right) \left(\|u\|_{\mathbb{H}^1(S)}^2 + \|v\|_{\mathbb{H}^1(S)}^2\right)\right]\right)^{\frac{1}{4}} \|u - v\|_{\mathbb{L}^2(S)},
 \end{aligned}$$

$|\phi(u) - \phi(v)| \leq C^{\frac{1}{4}} e^{(\frac{1}{2\pi^2} + 4)K} \|u - v\|_{\mathbb{L}^2(S)}$ par majoration des normes.

Ce qui assure que l'application ϕ est localement lipschitzienne. □

3.3 La structure fonctionnelle

Soit $\varphi \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ d'intégrale sur S négative. Notons E la fonctionnelle de $\mathbb{H}^1(S)$ dans \mathbb{R} définie par :

$$E : u \mapsto \frac{1}{2} \int_S |\nabla u|^2 dV_g + \int_S \varphi u dV_g + \int_S e^u dV_g,$$

où $|\nabla u|(p) = g(p)(\nabla u(p), \nabla u(p))$.

Cette fonctionnelle est bien définie, en effet, pour tout $u \in \mathbb{H}^1(S)$, on a :

- $\nabla u \in \mathbb{L}^2(S)$ donc est de carré intégrable sur S
- $0 \leq \int_S (\varphi u)^2 dV_g \leq \int_S \varphi^2 dV_g \int_S u^2 dV_g$ par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et u et φ sont de carrés intégrables sur S
- $\int_S e^u dV_g$ est fini par l'inégalité de Moser-Trudinger.

Proposition 40. *La fonctionnelle E est différentiable et pour tout $u \in \mathbb{H}^1(S)$,*

$$dE_u : v \mapsto \frac{1}{2} \int_S (\nabla u \cdot \nabla v + \varphi v + ve^u) dV_g.$$

Démonstration. Soient $u, v \in \mathbb{H}^1(S)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} E(u+tv) &= \frac{1}{2} \int_S |\nabla(u+tv)|^2 dV_g + \int_S \varphi(u+tv) dV_g + \int_S e^{u+tv} dV_g \\ &= \int_S \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + t \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{2} t^2 |\nabla v|^2 + \varphi u + t \varphi v + e^{u+tv} \right) dV_g \\ \frac{dE}{dt}(u+tv) &= \int_S (\nabla u \cdot \nabla v + t |\nabla v|^2 + \varphi v + ve^{u+tv}) dV_g \\ \frac{dE}{dt}(u+tv) \Big|_{t=0} &= \int_S (\nabla u \cdot \nabla v + \varphi v + ve^u) dV_g \end{aligned}$$

Ainsi E est différentiable, de différentielle :

$$dE_u : v \mapsto \int_S (\nabla u \cdot \nabla v + \varphi v + ve^u) dV_g.$$

Si de plus u est de classe C^2 alors, par la formule de Green on a :

$$dE_u : v \mapsto \int_S (-\Delta_g u + \varphi + e^u)v dV_g.$$

□

Proposition 41. *Une fonction $u \in C^\infty(S)$ est solution de l'équation $\Delta_g u - e^u = \varphi$ si et seulement si u est un point critique de E .*

Démonstration. Soit $u \in C^\infty(S)$.

Si u est solution de l'équation $\Delta_g u - e^u = \varphi$ alors pour tout $v \in \mathbb{H}^1(S)$ on a :

$$dE_u(v) = \int_S (-\Delta_g u + \varphi + e^u)v dV_g = 0,$$

donc u est un point critique de E .

Réciproquement si u est un point critique de E alors $v = -\Delta_g u + \varphi + e^u$ est un élément de $C^1(S) \subset \mathbb{H}^1(S)$ donc

$$0 = dE_u(v) = \int_S (-\Delta_g u + \varphi + e^u)^2 dV_g,$$

ce qui assure que u est solution de $\Delta_g u - e^u = \varphi$. □

Le caractère infiniment dérivable est assuré pas le théorème suivant.

Définition 42. On appelle solution faible de l'équation $\Delta_g u - e^u = \varphi$ toute fonction $u \in \mathbb{H}^1(S)$ telle que pour tout $v \in \mathbb{H}^1(S)$

$$\int_S \nabla u \cdot \nabla v + \varphi v + v e^u dV_g = 0.$$

Ainsi toute solution au sens faible est une solution au sens fort de l'équation.

Théorème 43. *Théorème de régularité des équations elliptiques*

Toute solution faible de l'équation $\Delta_g u - e^u = \varphi$ est infiniment différentiable.

3.4 Le cas des fonctions constantes

Pour tout réel t , on note u_t la fonction de S dans \mathbb{R} constante égale à t .

On définit alors \tilde{E} par

$$\tilde{E} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto E(u_t) = t \int_S \varphi dV_g + e^t A(S).$$

L'étude élémentaire des variations de l'application dérivable \tilde{E} assure que \tilde{E} n'est pas majoré et admet pour seul point critique un minimum global atteint en $t = \ln(-\bar{\varphi})$ où $\bar{\varphi} = \frac{1}{A(S)} \int_S \varphi dV_g < 0$.

Cette étude motive la recherche d'un minimum global de E .

4 Résolution par méthode directe

Cette partie détaille l'usage de la topologie faible dans les espaces de Hilbert afin de démontrer l'existence de minimums globaux pour certaines fonctionnelles et se conclut par la preuve de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation 1.

4.1 La topologie faible dans le cas hilbertien

Soit $(\mathbb{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace hilbertien.

Définition 44. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un élément $x \in \mathbb{H}$ si pour tout $y \in \mathbb{H}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n | y \rangle = \langle x | y \rangle$. On note alors $x_n \rightharpoonup x$.

Théorème 45. *Toute suite bornée à valeurs dans \mathbb{H} admet une sous-suite extraite faiblement convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée.

Quitte à raisonner sur $\mathbb{H} = \overline{\text{Vect}\{f_n; n \in \mathbb{N}\}}$ qui est un Hilbert séparable et conclure par le théorème du supplémentaire orthogonal, on peut supposer que \mathbb{H} est séparable.

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans \mathbb{H} .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(\langle x_n | e_k \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, par extraction diagonale on dispose d'une extractrice ψ telle que la suite $(\langle x_{\psi(n)} | e_k \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soient $g \in \mathbb{H}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Il existe par densité, un entier naturel K tel que $\|g - e_K\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$ où M est un majorant de la suite $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$. Par convergence de la suite $(\langle x_{\psi(n)} | e_k \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ on dispose d'un entier naturel N tel que pour tout $m, n \geq N$ $|\langle x_{\psi(n)} - x_{\psi(m)} | e_K \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors pour $m, n \geq N$

$$\begin{aligned} |\langle x_{\psi(n)} - x_{\psi(m)} | g \rangle| &\leq |\langle x_{\psi(n)} - x_{\psi(m)} | e_K \rangle| + |\langle x_{\psi(n)} - x_{\psi(m)} | g - e_K \rangle| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc la suite $(|\langle x_{\psi(n)} | g \rangle|)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge dans \mathbb{R} vers une limite $L(g)$.

L est une forme linéaire est continue, donc par le théorème de Riesz, on dispose de $f \in \mathbb{H}$ tel que $L(g) = \langle f | g \rangle$ et par conséquent $f_{\psi(n)} \rightharpoonup f$. \square

Théorème 46. *Inégalité de Poincaré-Wirtinger*

Il existe une constante $C > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$,

$$\|u - \bar{u}\|_{\mathbb{L}^2(S)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(S)}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe une constante positive C telle que pour tout $u \in \mathbb{H}^1(S)$ de moyenne nulle sur S on a

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2(S)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(S)}.$$

Par l'absurde, supposons que pour toute constante C , il existe une application $u_C \in \mathbb{H}^1(S)$ d'intégrale nulle sur S telle que

$$\|u_C\|_{\mathbb{L}^2(S)} > C \|\nabla u_C\|_{\mathbb{L}^2(S)}.$$

En particulier, on dispose d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de $\mathbb{H}^1(S)$ d'intégrale nulle sur S telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(S)} > n \|\nabla u_n\|_{\mathbb{L}^2(S)}.$$

On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(S)}} u_n$.

On a alors $\|v_n\|_{\mathbb{L}^2(S)} = \frac{1}{\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(S)}} \|u_n\|_{\mathbb{L}^2(S)} = 1$ et

$$\|\nabla v_n\|_{\mathbb{L}^2(S)} = \frac{1}{\|u_n\|_{\mathbb{L}^2(S)}} \|\nabla u_n\|_{\mathbb{L}^2(S)} < \frac{1}{n}.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée dans $\mathbb{H}^1(S)$ et elle admet une sous-suite $(v_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans $\mathbb{H}^1(S)$ vers une application v .

Le théorème de Rellich assure que, quitte à extraire de nouveau, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $\mathbb{L}^2(S)$ vers v . Par passage à la limite, $\|v\|_{\mathbb{L}^2(S)} = 1$ et v est d'intégrale nulle sur S .

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et convergence faible, on a que

$$\|v_n\|_{\mathbb{H}^1(S)} \|v\|_{\mathbb{H}^1(S)} \geq \langle v_n | v \rangle_{\mathbb{H}^1(S)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|v\|_{\mathbb{H}^1(S)}^2,$$

donc, par passage à la limite inférieure et comme $\|v\|_{\mathbb{H}^1(S)} \geq \|v\|_{\mathbb{L}^2(S)} = 1 > 0$, on a

$$\liminf \|v_n\|_{\mathbb{H}^1(S)} \geq \|v\|_{\mathbb{H}^1(S)}.$$

Or, par définition de la norme dans $\mathbb{H}^1(S)$ et convergence forte dans $\mathbb{L}^2(S)$

$$\liminf \|v_n\|_{\mathbb{H}^1(S)} = \liminf \left(\|v_n\|_{\mathbb{L}^2(S)} + \|\nabla v_n\|_{\mathbb{L}^2(S)} \right) = 1 \text{ et}$$

$$\|v\|_{\mathbb{H}^1(S)} = \|v\|_{\mathbb{L}^2(S)} + \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(S)} = 1 + \|\nabla v\|_{\mathbb{H}^1(S)},$$

ce qui assure que $\|\nabla v\|_{\mathbb{H}^1(S)} = 0$ et contredit que $\|v\|_{\mathbb{L}^2(S)} = 1$ et v est d'intégrale nulle sur S .

Donc il existe une constante positive C telle que pour tout $u \in \mathbb{H}^1(S)$ de moyenne nulle sur S on a

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2(S)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(S)}.$$

□

Définition 47. On dit qu'une fonction $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (sci) au point $u \in \mathbb{H}$ si pour tout suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers u , on a

$$J(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n).$$

Si J est sci en tout point de \mathbb{H} alors on la qualifie de sci sur \mathbb{H} .

Définition 48. On dit qu'une fonction $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement (faiblement sci) au point $u \in \mathbb{H}$ si pour tout suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente vers u , on a

$$J(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_n).$$

Si J est faiblement sci en tout point de \mathbb{H} alors on la qualifie de faiblement sci sur \mathbb{H} .

Remarque 49. Toute fonctionnelle faiblement sci est sci mais la réciproque est fausse, en effet pour $J : u \mapsto 1 - \|u\|$ on a que J est continue donc sci mais pour toute base Hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{H} tend faiblement vers 0 et $J(0) = 1 > 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(e_n)$.
Donc J n'est pas faiblement sci.

Définition 50. Une fonction $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $u, v \in \mathbb{H}$

$$J(tu + (1 - t)v) \leq tJ(u) + (1 - t)J(v).$$

Elle est dite strictement convexe si $J(tu + (1 - t)v) < tJ(u) + (1 - t)J(v)$ quand $u \neq v$ et $t \in]0, 1[$.

Définition 51. Une fonction $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est coercive si

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

Théorème 52. Soit $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et sci. Alors J est faiblement sci.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{H} faiblement convergente vers un élément u de \mathbb{H} .

Si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = +\infty$ alors on a le résultat attendu.

Si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \alpha < +\infty$ alors, on dispose d'une suite strictement décroissante de réels $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite α . Comme J est convexe et sci, pour tout entier naturel k , l'ensemble $\{J \leq \alpha_k\}$ est convexe et fermé.

Alors par le théorème de projection sur un convexe fermé dans un Hilbert, le projeté $\pi_k(u)$ de u sur l'ensemble $\{J \leq \alpha_k\}$ est caractérisé comme étant le seul élément de $\{J \leq \alpha_k\}$ vérifiant

$$\text{pour tout } v \in \{J \leq \alpha_k\}, \langle u - \pi_k(u) | v - \pi_k(u) \rangle \leq 0.$$

Cependant, on dispose d'une extractrice σ_k telle que la sous-suite $(u_{\sigma_k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ soit à valeurs dans l'ensemble $\{J \leq \alpha_k\}$, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle u - \pi_k(u) | u_{\sigma(n)} - \pi_k(u) \rangle \leq 0.$$

La convergence faible de la suite $(u_{\sigma_k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ assure alors que

$$\|u - \pi_k(u)\|^2 = \langle u - \pi_k(u) | u - \pi_k(u) \rangle \leq 0.$$

Ce qui assure que $u = \pi_k(u)$ et que u appartient $\{J \leq \alpha_k\}$ pour tout entier naturel k , d'où $J(u) \leq \alpha = \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(x_n)$ ce qui est le résultat attendu \square

Théorème 53. *Weierstrass*

Soient \mathbb{H} un espace d'Hilbert et $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, sci et coercive. Alors il existe $\tilde{u} \in \mathbb{H}$ tel que $J(\tilde{u}) \leq J(v)$, pour tout $v \in \mathbb{H}$.

Si J est strictement convexe alors ce minimum est atteint en un unique point.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{H}$, $J(x) < +\infty$ donc la borne inférieure m de J vérifie

$$m \leq J(x) < +\infty.$$

On dispose de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante, c'est-à-dire que $J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m$. Cette suite est bornée, car si une sous-suite des normes diverge vers $+\infty$, alors par

coercivité de J , la sous-suite des images par J diverge vers $+\infty$ et ne converge donc pas vers m . Par le théorème 45, il existe une extractrice σ telle que la sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\tilde{u} \in \mathbb{H}$. On a alors, car J est convexe et sci donc faiblement sci :

$$J(\tilde{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(u_{\sigma(n)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_{\sigma(n)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = m \leq J(\tilde{u}).$$

Ainsi $J(\tilde{u}) = m$ et J atteint sa borne inférieure sur \mathbb{H} .

Si J est strictement convexe et atteint son minimum en deux points distincts u et v , alors,

$$\inf_{\mathbb{H}} J \leq J\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}(J(u) + J(v)) = \inf_{\mathbb{H}} J,$$

ce qui est absurde et démontre l'unicité du minimum. □

4.2 Application

La fonctionnelle que l'on cherche à minimiser sur $\mathbb{H}^1(S)$ est

$$E : u \mapsto \frac{1}{2} \int_S \|\nabla u\|^2 dV_g + \int_S \varphi u dV_g + \int_S e^u dV_g,$$

avec $\varphi \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ d'intégrale strictement négative sur S .

Proposition 54. *La fonctionnelle E est continue.*

Démonstration. La continuité de E comme somme d'applications continues découle de trois points :

- On a clairement $\frac{1}{2} \int_S \|\nabla u\|^2 dV_g \leq \frac{1}{2} \|u\|_{\mathbb{H}^1(S)}$.
- Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\int_S \varphi u dV_g \leq \left(\int_S \varphi^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathbb{L}^2(S)} \leq \left(\int_S \varphi^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathbb{H}^1(S)}.$$

- La fonction ϕ définie en proposition 39 est localement lipschitzienne. □

Remarque 55. *La fonctionnelle E est donc semi-continue inférieurement.*

Proposition 56. *L'application $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{1}{2} \|u\|^2$ est strictement convexe.*

Démonstration. Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
 g(tu + (1-t)v) &= \frac{1}{2} \|tu + (1-t)v\|^2 \\
 &= \frac{1}{2} (t^2 \|u\|^2 + 2t(1-t) \langle u|v \rangle + (1-t)^2 \|v\|^2) \\
 &= \frac{t}{2} \|u\|^2 + \frac{1-t}{2} \|v\|^2 - \frac{t(1-t)}{2} (\|u\|^2 - 2 \langle u|v \rangle + \|v\|^2) \\
 &= \frac{t}{2} \|u\|^2 + \frac{1-t}{2} \|v\|^2 - \frac{t(1-t)}{2} \|u-v\|^2 \\
 g(tu + (1-t)v) &\leq tg(u) + (1-t)g(v),
 \end{aligned}$$

De plus, si $u \neq v$ et $t(1-t) \neq 0$ alors $\frac{t(1-t)}{2} \|u-v\|^2 > 0$ ce qui prouve la stricte convexité de g . \square

Proposition 57. *La fonctionnelle E est strictement convexe.*

Démonstration. Soient $u, v \in \mathbb{H}^1(S)$ et $t \in [0, 1]$.

On a, par stricte convexité de la fonction g et de l'exponentielle et par linéarité de l'intégrale et du gradient :

$$\begin{aligned}
 E(tu + (1-t)v) &= \frac{1}{2} \int_S \|\nabla(tu + (1-t)v)\|^2 + \varphi(tu + (1-t)v) + e^{tu+(1-t)v} dV_g \\
 &< \int_S \frac{t}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1-t}{2} \|\nabla v\|^2 + t\varphi u + (1-t)\varphi v + te^u + (1-t)e^v dV_g \\
 &< tE(u) + (1-t)E(v),
 \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. \square

Proposition 58. *La fonctionnelle E est coercive.*

Il existe même deux constantes C_1 et C_2 avec $C_1 > 0$ telles que, pour tout $u \in \mathbb{H}^1(S)$,

$$E(u) \geq C_1 \|u\|_{\mathbb{H}^1(S)} - C_2.$$

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{H}^1(S)$.

On note $\bar{u} = \frac{1}{A(S)} \int_S u dV_g$ et $\bar{\varphi} = \frac{1}{A(S)} \int_S \varphi dV_g < 0$.

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}
 \int_S \varphi u dV_g &= \int_S \varphi(u - \bar{u}) dV_g + \bar{u} \int_S \varphi dV_g \\
 &= \int_S \varphi(u - \bar{u}) dV_g + \bar{\varphi} \int_S u dV_g.
 \end{aligned}$$

Ainsi la fonctionnelle E se réécrit

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_S \|\nabla u\|^2 dV_g + \int_S \varphi(u - \bar{u}) dV_g + \int_S (\bar{\varphi}u + e^u) dV_g$$

Or comme $\bar{\varphi} < 0$, on a $(\bar{\varphi}u + e^u) \geq \bar{\varphi} (\ln(-\bar{\varphi}) - 1)$, ce qui assure que

$$E(u) \geq \frac{1}{2} \int_S \|\nabla u\|^2 dV_g + \int_S \varphi(u - \bar{u}) dV_g + \bar{\varphi} (\ln(-\bar{\varphi}) - 1) A(S).$$

Par l'inégalité de Young, on a ensuite, pour tout réel strictement positif ϵ ,

$$\begin{aligned} \int_S \varphi(u - \bar{u}) dV_g &\geq - \int_S |\varphi(u - \bar{u})| dV_g \\ &\geq - \frac{\epsilon}{2} \int_S |u - \bar{u}|^2 dV_g - \frac{1}{2\epsilon} \int_S \varphi^2 dV_g \\ &\geq - \frac{\epsilon}{2} C \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(S)}^2 - \frac{1}{2\epsilon} \int_S \varphi^2 dV_g \text{ par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger.} \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$E(u) \geq \frac{1}{2} (1 - C\epsilon) \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(S)}^2 - \frac{1}{2\epsilon} \int_S \varphi^2 + \bar{\varphi} (\ln(-\bar{\varphi}) - 1) A(S).$$

Pour $\epsilon = \frac{1}{2C}$, on a alors

$$E(u) \geq \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(S)}^2 - C \int_S \varphi^2 + \bar{\varphi} (\ln(-\bar{\varphi}) - 1) A(S).$$

Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on a, par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger :

$$E(u) \geq \frac{1}{4} \left(\alpha \|\nabla u\|_{\mathbb{H}^1(S)}^2 + \frac{(1 - \alpha)}{C^2} \|u - \bar{u}\|_{\mathbb{L}^2(S)}^2 \right) - C \int_S \varphi^2 + \bar{\varphi} (\ln(-\bar{\varphi}) - 1) A(S).$$

D'où, pour $\alpha = \frac{1}{1+C^2}$, on a

$$E(u) \geq \frac{1}{4(1+C^2)} \left(\|\nabla u\|_{\mathbb{H}^1(S)}^2 + \|u - \bar{u}\|_{\mathbb{L}^2(S)}^2 \right) - C \int_S \varphi^2 + \bar{\varphi} (\ln(-\bar{\varphi}) - 1) A(S).$$

Comme $\langle u | \bar{u} \rangle_{\mathbb{L}^2(S)} = (\bar{u})^2 A(S)$, on a finalement :

$$E(u) \geq \frac{1}{4(1+C^2)} \left(\|\nabla u\|_{\mathbb{H}^1(S)}^2 + (1 - A(S)) \bar{u}^2 \right) - C \int_S \varphi^2 + \bar{\varphi} (\ln(-\bar{\varphi}) - 1) A(S).$$

Quitte à rétracter la surface, ce qui laisse invariant par biholomorphisme, on peut supposer que $A(S) \leq 1$ ce qui donne le résultat attendu avec $C_1 = \frac{1}{4(1+C^2)}$ et $C_2 = C \int_S \varphi^2 - \bar{\varphi} (\ln(-\bar{\varphi}) - 1) A(S)$.

□

Proposition 59. *La fonctionnelle E est ainsi strictement convexe, sci et coercive, donc elle admet un unique minimum global sur $\mathbb{H}^1(S)$, par le théorème de Weierstrass. Il s'agit donc d'une solution de l'équation $\Delta_g u - e^u = \varphi$ de classe $C^\infty(S)$.*

Théorème 60. *Il existe une unique solution $u \in C^\infty(S)$ à l'équation $\Delta_g u - e^u = \varphi$.*

Démonstration. Soit $u \in C^\infty(S)$ une solution de l'équation $\Delta_g u - e^u = \varphi$. Une telle solution existe par la proposition 59.

Par la proposition 41, il s'agit d'un point critique de la fonctionnelle E . Or pour tout $v \in \mathbb{H}^1(S)$, par convexité de la fonctionnelle E ,

$$E(v) \geq E(u) + dE_u(v - u) = E(u),$$

ce qui assure que E admet un minimum global en u .

La proposition 59 assure alors l'unicité du minimum et de la solution. \square

5 La méthode de Poincaré

Cette partie donne un regard rapide et sans rentrer dans les détails sur la méthode employée par Poincaré en 1898 pour résoudre l'équation

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi,$$

où $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement positive et $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'intégrale strictement positive.

On considère une surface de Riemann algébrique et compacte S muni d'une métrique riemannienne g compatible avec la structure complexe.

Pour résoudre l'équation, Poincaré part de l'équation de Poisson qu'il sait résoudre $\Delta_g u = -\varphi$ qu'il modifie peu à peu pour aboutir à l'équation de départ.

1. Puisque la surface est algébrique, Poincaré exhibe explicitement des fonctions harmoniques à singularités sur S en prenant la partie réelle de fonctions méromorphes à pôles. Il intègre alors l'équation $\Delta_g u = -\varphi$, pour toute fonction φ de moyenne nulle sur S , à l'aide d'une fonction de Green.
2. On s'intéresse alors à l'équation $\Delta_g u = \eta u - \varphi$.

Pour toutes fonctions η et φ et tout λ suffisamment petit, on peut résoudre l'équation $\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi$ par un développement en série par rapport à λ : $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 \dots$ et en remarquant que chacun des u_i vérifie une équation de Poisson et que la série a un rayon de convergence non nul.

Il montre alors que l'on peut résoudre l'équation $\Delta_g u = (\lambda + \lambda_0) \eta u - \varphi$ si on a résolu $\Delta_g u = \lambda_0 \eta u - \varphi$ pour tout $\lambda \in [0, \lambda_0[$.

Ce qui assure que l'on puisse résoudre $\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi$ pour tout $\lambda > 0$ et en particulier $\Delta_g u = \eta u - \varphi$.

3. On considère alors l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$.

Si φ est proportionnelle à θ alors on dispose d'une solution.

On montre sinon que si l'on sait résoudre $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi_0$ pour une certaine fonction φ_0 alors on peut résoudre $\Delta_g u = \theta e^u - (\varphi_0 + \lambda \Psi)$ pour toute fonction Ψ et pour λ suffisamment petit.

On résout alors $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$ quand φ est strictement positive.

4. Si φ est seulement d'intégrale strictement positive alors on note $\varphi_0 = \phi - \int_S \varphi$ et on résout successivement $\Delta_g v = -\varphi_0$ et $\Delta_g w = \theta e^v e^w - \int_S \varphi$ et la fonction $u = v + w$ est solution de l'équation de départ.

Poincaré a ainsi démontré l'existence d'une solution de l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$ ainsi que son unicité en étudiant $\Delta_g(u-v) = \theta e^{u-v} - \varphi$ où u et v sont deux solutions.

Cette méthode permet d'expliciter une solution à l'aide de produits de convolution et de séries entières mais reste plus pénible à mettre en oeuvre que la solution moderne publiée par M.Berger en 1971. [3]

6 Conclusion

Dans ce mémoire on s'est uniquement intéressé aux surfaces de genre supérieur ou égal à deux c'est-à-dire avec $\int_S K_g < 0$.

On admet ici que le théorème d'uniformisation dans le cas des surfaces simplement connexes non compactes est équivalent à la résolution de l'équation $\Delta u - e^u = \varphi$ sur une surface compacte de genre supérieur ou égal à 2 avec $\int_S \varphi \leq 0$. La démonstration de l'équivalence utilise des notions géométriques et topologiques (revêtement universel.....) qui sont hors du cadre de ce mémoire.

Ce mémoire a ainsi montré qu'il est possible de définir sur toute surface de Riemann compacte, connexe et de genre supérieure ou égale à 2, une unique métrique lui donnant une courbure de Gauss constante égale à -1.

Ce qui conclut que la surface est biholomorphe au disque.

Références

- [1] Manfredo P. do CARMO. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall, 1976. ISBN : 978-0-13-212589-5.
- [2] J.MOSER. *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*. Indiana Univ. Math. J., 1971.
- [3] M.BERGER. *Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds*. Journal of Differential Geometry, 1971.
- [4] S. MONTIEL, A. ROS et D.G. BABBITT. *Curves and Surfaces*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2009. ISBN : 9780821847633.
- [5] Henri Paul de SAINT-GERVAIS. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon, 2010. ISBN : 978-2-84788-233-9.