224 – Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

2013 – 2014

Question.

Quel outil principal utilise-t-on pour prouver le théorème des nombres premiers ?

Réponse.

On utilise la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ définie sur $\mathrm{Re}(s) > 1$, que l'on écrit sous la forme

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Question.

Donner le terme suivant dans le développement asymptotique de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Réponse.

On écrit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + x_n.$$

On a

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\sum_{n=N}^{+\infty} x_{n+1} - x_n = -x_N$$

et la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ est convergente donc

$$x_N \sim \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \sim \int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2} = \frac{1}{2N}.$$

Question.

On pose la suite $u_{n=1} = u_n e^{-u_n}$ avec $u_0 > 0$, donner un équivalent de (u_n).

Réponse.

On pose $f : x \mapsto xe^{-x}$, on a $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.

f admet 0 comme unique point fixe. Par ailleurs, $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1) \leq 0$ donc (u_n) est décroissante et positive, donc converge vers 0.

Trouvons α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ne tend pas vers 0. On prend $\alpha < 0$, sinon $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tend vers 0.

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= u_n^\alpha(e^{-\alpha u_n} - 1) \\
&= u_n^\alpha(-\alpha u_n + o(u_n)) \\
&= -\alpha u_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1}).
\end{aligned}$$

On pose $\alpha = -1$, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = 1$.

On en déduit, par le lemme de Césaro,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = 1$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right) = 1$, d'où $u_n \sim \frac{1}{n}$.