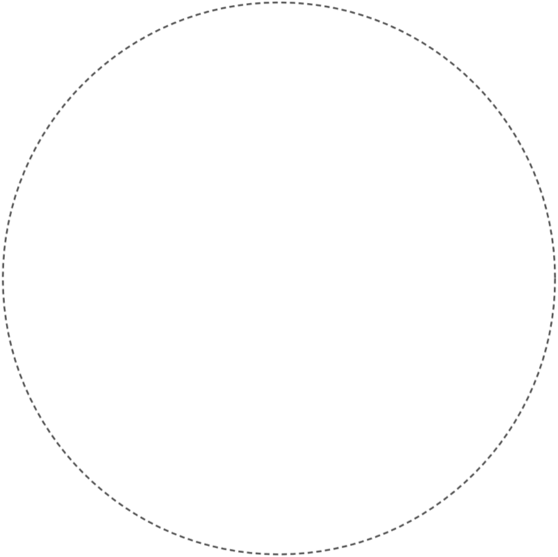
Une preuve hyperbolique du théorème des sept cercles

Introduction à la géométrie hyperbolique

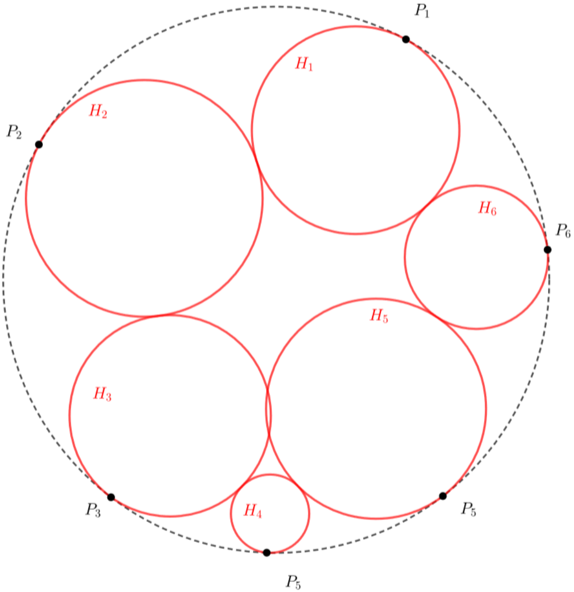
Pierre Larivé

Septembre 2024

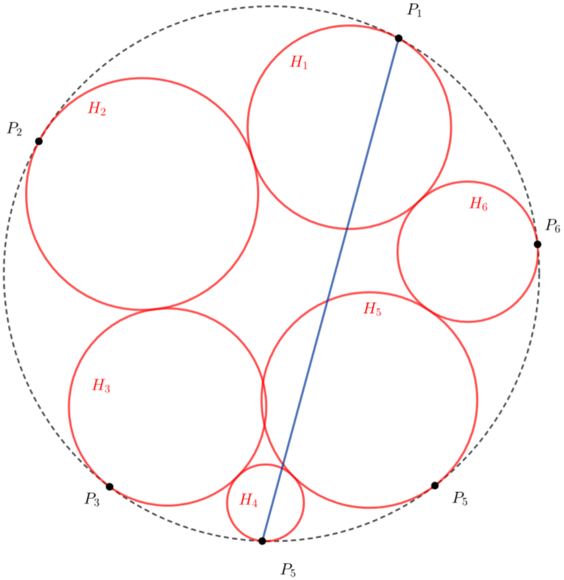
Énoncé du théorème des sept cercles



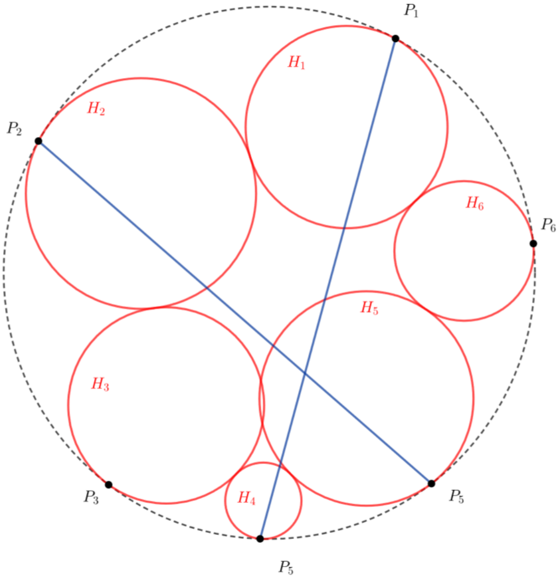
Énoncé du théorème des sept cercles



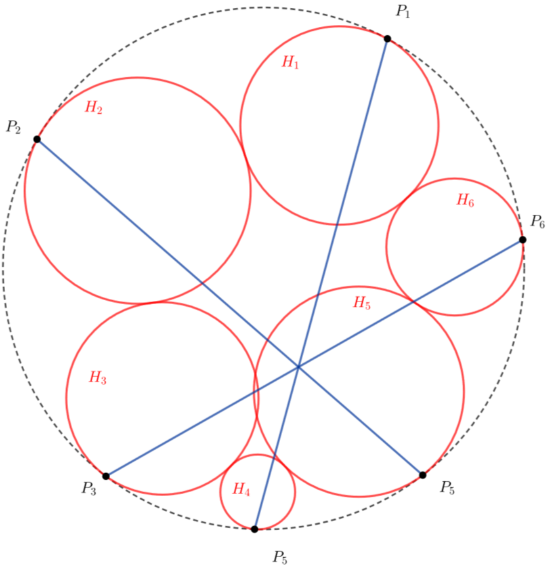
Énoncé du théorème des sept cercles



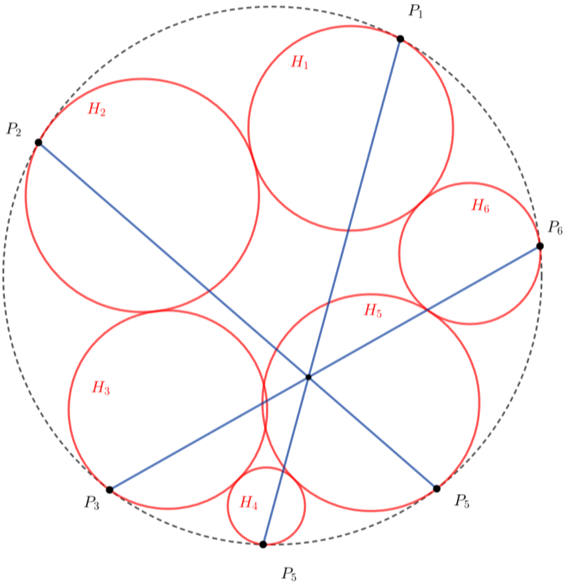
Énoncé du théorème des sept cercles



Énoncé du théorème des sept cercles



Énoncé du théorème des sept cercles



Géométrie non-euclidienne : idée générale

Dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on dispose d'outils de géométrie :

- droites, segments
- angles
- polygones, sphères
- translations, homothéties

Comment généraliser ce type de notions pour étudier d'autres espaces métriques ?

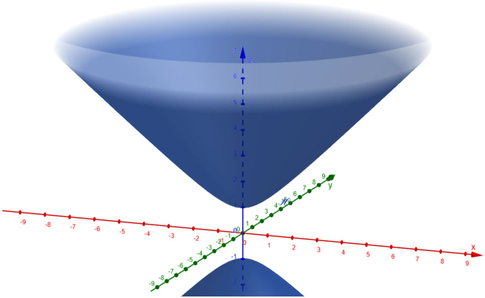
Géométrie hyperbolique : introduction

Définition 1 *Modèle de l'hyperboloïde*

Le *modèle de l'hyperboloïde* $\mathcal{H}$ désigne l'ensemble

$$\mathcal{H} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1 \text{ et } z > 0\right\}$$

muni de la métrique locale $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$.



Définition 2 *Géodésique*

Soit $\gamma : I \to X$ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$.
On dit que γ est une géodésique s'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall t_0 \in I, \exists \delta > 0, \forall t, t' \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], d(\gamma(t), \gamma(t')) = c|t - t'|.$$

Propriété 1 *Géodésiques en géométrie hyperbolique*

Soit $P \in \mathcal{H}$, et $u \in T_P\mathcal{H}$.
Le chemin $\{\mathrm{ch}(t)P + \mathrm{sh}(t)u \mid t \in \mathbb{R}\}$ est une géodésique.

Propriété 2 *Unicité des géodésiques*

Il existe une unique géodésique reliant deux points, et celle-ci minimise globalement la distance entre ses points.

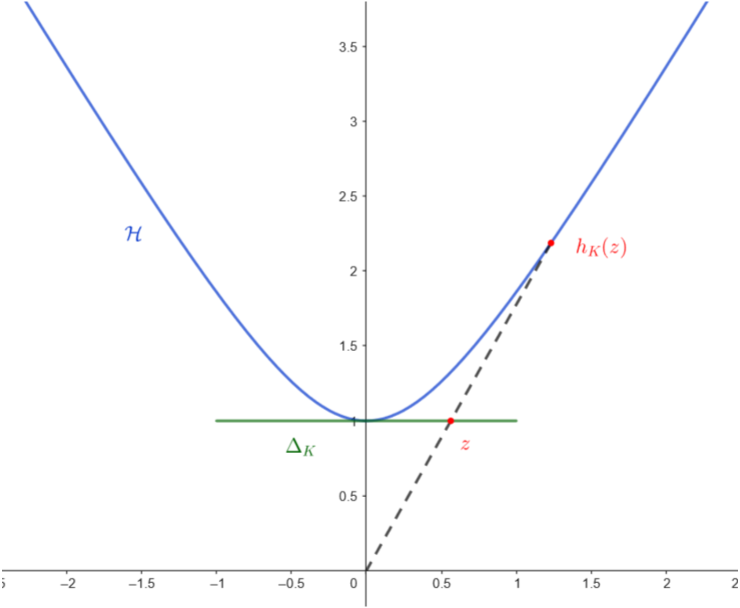
Définition 3 *Modèle de Klein*

On note Δ_K le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.
On considère l'homéomorphisme

$$h_K : \left| \begin{array}{ccc} \Delta_K & \to & \mathcal{H} \\ z = (x+iy) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}(x,y,1) \end{array} \right.$$

Le *modèle de Klein* désigne l'ensemble Δ_K muni de la métrique ramenée par h_K, i.e. vérifiant :

$$\forall z, w \in \Delta_K, d_{\Delta_K}(z,w) = d_{\mathcal{H}}(h_K(z), h_K(w))$$


$\mathcal{H}$
$h_K(z)$
Δ_K
z
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

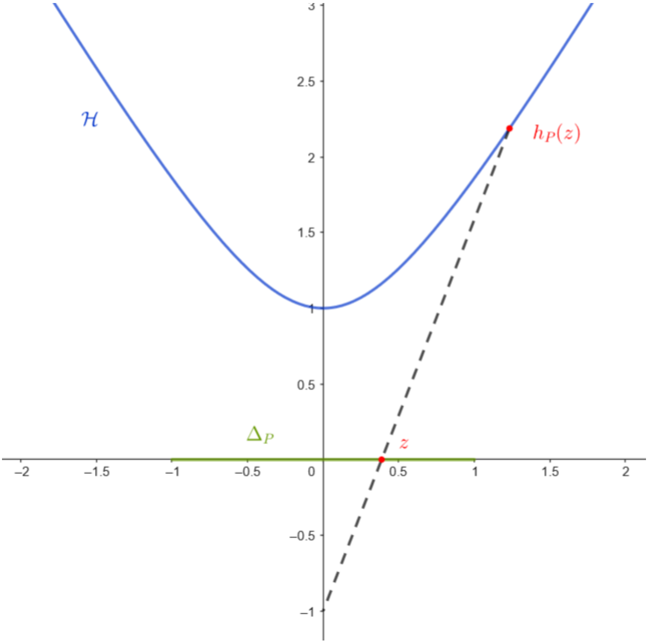
Définition 4 *Modèle du disque de Poincaré*

On note Δ_P le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.
On considère l'homéomorphisme

$$h_P : \left| \begin{array}{ccc} \Delta_P & \to & \mathcal{H} \\ z = (x+iy) & \mapsto & \frac{1}{1-|z|^2}(2x, 2y, 1+|z|^2) \end{array} \right.$$

Le *modèle du disque de Poincaré* désigne l'ensemble Δ_P muni de la métrique ramenée par h_P, i.e. vérifiant :

$$\forall z, w \in \Delta_P, d_{\Delta_P}(z, w) = d_{\mathcal{H}}(h_P(z), h_P(w))$$


$\mathcal{H}$
$h_P(z)$
Δ_P
z
3
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

Du modèle de Klein à celui de Poincaré

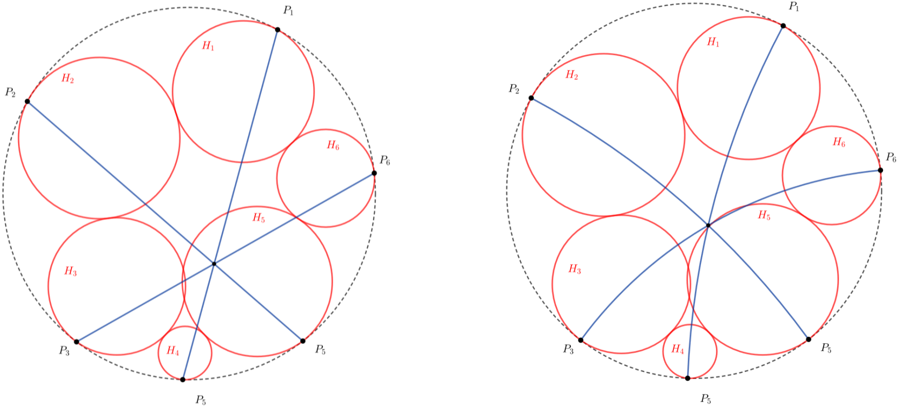


Figure – Théorème des sept cercles dans le modèle de Klein (à gauche) et dans le modèle de Poincaré (à droite).

Définition 5 *Fonction de Busemann*

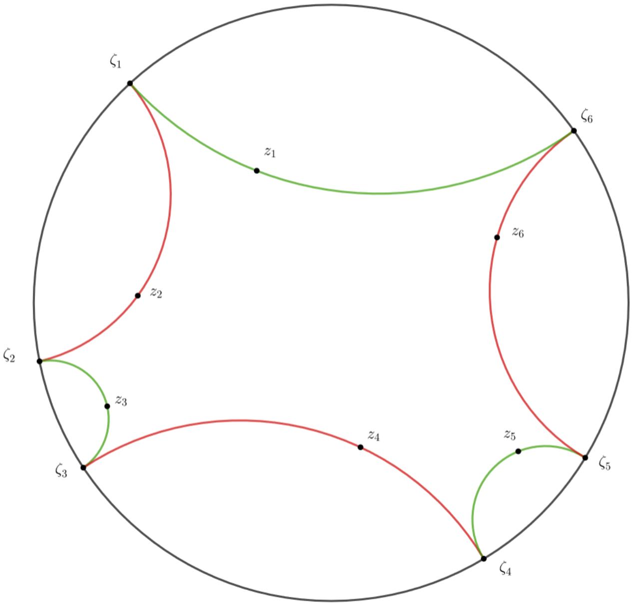
Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \Delta_P$ une géodésique paramétrée par longueur d'arc. On note $\zeta = \gamma(+\infty)$.
On appelle *fonction de Busemann* associée à γ, ζ l'application

$$b_{\gamma,\zeta} : \left| \begin{array}{ccc} \Delta_P & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \lim_{t\to+\infty}(d(z,\gamma(t)) - t) \end{array} \right. .$$

Propriété 3

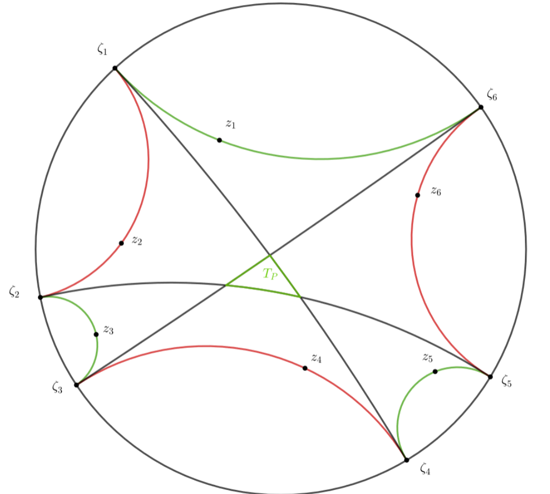
La fonction de Busemann ne dépend que de ζ.

Périmètre alterné



Théorème 1 *Théorème impliquant le théorème des sept cercles*

Soit $\zeta_1, \cdots, \zeta_6$ sur le cercle unité.
Alors le périmètre alterné de l'hexagone idéal formé par ces six sommets est, au signe près, deux fois le périmètre du triangle formé par les géodésiques $(\zeta_1\zeta_4), (\zeta_2\zeta_5)$ et $(\zeta_3\zeta_6)$.



Preuve du théorème

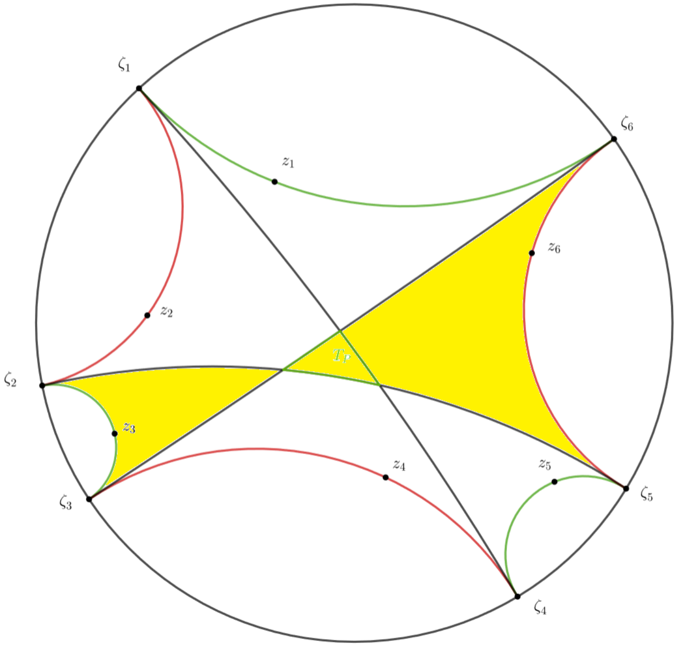
Théorème 2 *Isométries du disque de Poincaré*

Le groupe des isométries de Δ_P est l'ensemble

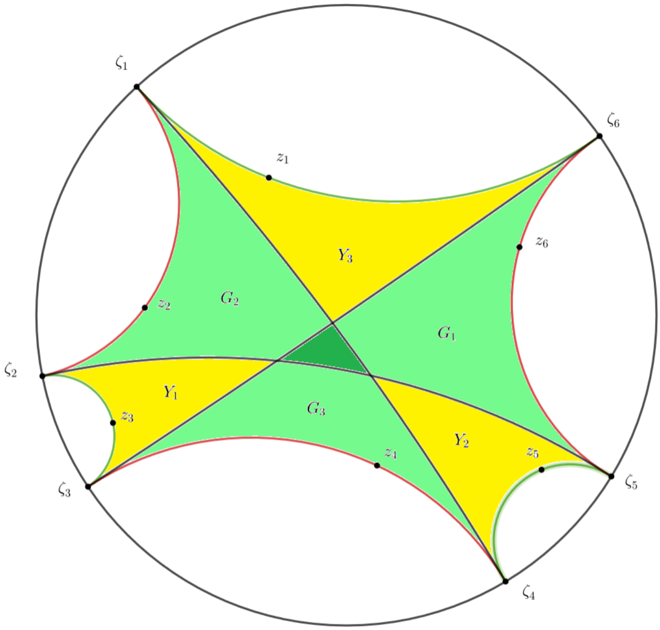
$$\left\{ z \mapsto \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}, z \mapsto \frac{a\bar{z}+\bar{c}}{c\bar{z}+\bar{a}} \mid |a|^2 - |c|^2 > 0, a, c \in \mathbb{C} \right\}$$

En pratique :

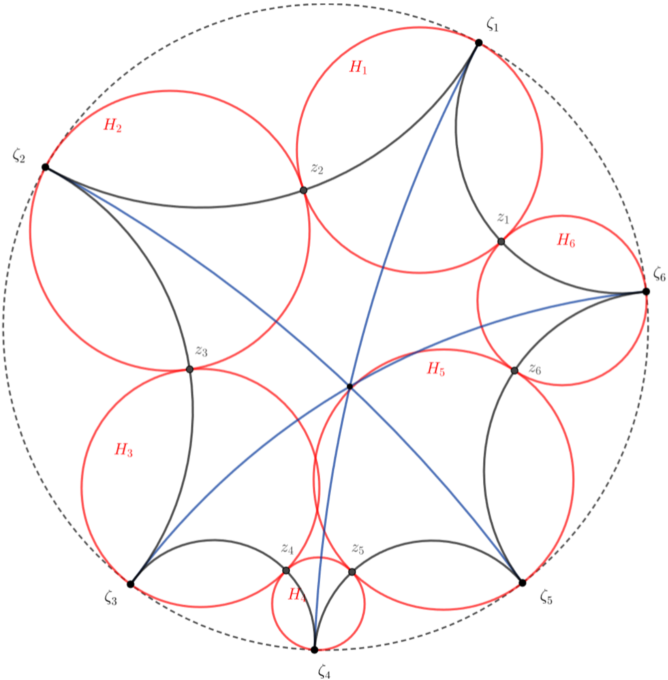
- Les rotations sont des isométries.
- On dispose d'une isométrie envoyant n'importe quel point sur 0.



ζ_1
ζ_6
z_1
z_6
z_2
T_P
ζ_2
z_3
z_4
z_5
ζ_5
ζ_3
ζ_4



ζ_1
ζ_2
ζ_3
ζ_4
ζ_5
ζ_6
z_1
z_2
z_3
z_4
z_5
z_6
Y_1
Y_2
Y_3
G_1
G_2
G_3



ζ_1
H_1
H_2
ζ_2
z_2
z_1
H_6
ζ_6
z_3
H_5
z_6
H_3
z_4
z_5
H_4
ζ_3
ζ_5
ζ_4

Merci pour votre écoute !