

Une preuve hyperbolique du théorème des sept cercles

Introduction à la géométrie hyperbolique en dimension 2 à travers le théorème des sept cercles

Pierre LARIVÉ

Septembre 2024

On propose de présenter un exemple de géométrie non euclidienne, la géométrie hyperbolique en dimension 2, en l'utilisant pour la preuve d'un problème de géométrie, dont l'énoncé est le suivant.

Théorème 0.1 *Théorème des sept cercles*

Soit H_1, \dots, H_6 une chaîne de six cercles tangents consécutivement, tous intérieurs et tangents au cercle unité en les points P_1, \dots, P_6 .

Alors les trois droites reliant les sommets opposés de l'hexagone $P_1 \dots P_6$ sont concourantes.

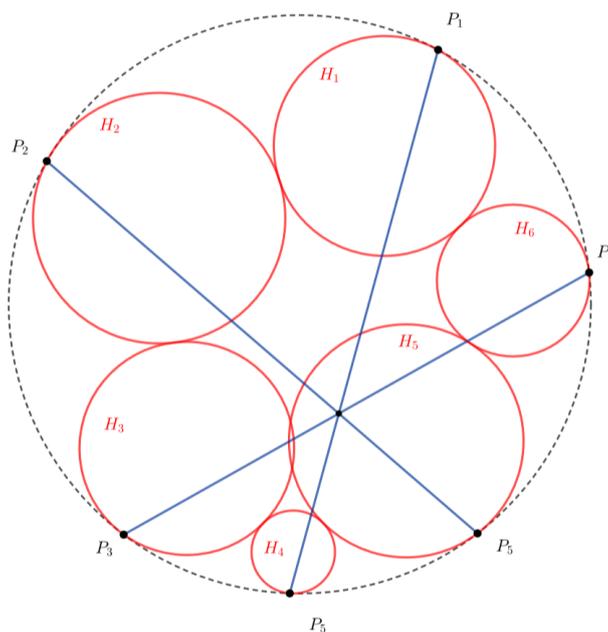


FIGURE 1 – Illustration du théorème des sept cercles.

Dans un premier temps, on définit la géométrie hyperbolique et ses outils élémentaires. Puis on définit différents modèles de cette géométrie et la façon de naviguer entre eux. Enfin, on utilise ces éléments pour donner une interprétation hyperbolique du théorème des sept cercles, permettant ainsi de faciliter sa compréhension et d'établir un résultat plus fort l'impliquant.

1 Introduction à la géométrie hyperbolique

1.1 Notions fondamentales de géométrie

On définit des notions qui sont intuitives en géométrie euclidienne, mais qui nécessitent en géométrie non euclidienne une étude préalable afin de comprendre leur forme et de les utiliser.

Dans toute cette partie, (X, d) désigne un espace métrique.

1.1.1 Longueur d'un chemin et métrique

Définition 1.1 *Longueur d'un chemin*

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un chemin \mathcal{C}^1 .

La *longueur* de γ , notée $L(\gamma)$, est la quantité

$$L(\gamma) = \sup_{a=t_1 < \dots < t_n=b} \sum_{i=0}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

On admet que dans les espaces étudiés, la distance d vérifiera toujours la propriété suivante : la distance entre deux points est égale à la borne inférieure des longueurs des chemins les reliant. On dit alors que (X, d) est un espace de longueur. Ce fait permet de définir un espace métrique à partir d'une métrique locale, comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.1 *Métrique locale de l'espace euclidien*

On munit le plan \mathbb{R}^2 de la métrique locale $ds^2 = dx^2 + dy^2$, ce qui signifie que pour tout chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 , on a

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}_x(t)^2 + \dot{\gamma}_y(t)^2} dt.$$

Si γ est le segment euclidien reliant $u, v \in \mathbb{R}^2$, on vérifie que $L(\gamma) = \|u - v\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

1.1.2 Géodésiques

La notion de géodésique prolonge celle de segment entre deux points et celle de droite.

Définition 1.2 *Géodésique*

Soit $x, y \in X$,

$\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un chemin \mathcal{C}^1 tel que $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$.

On dit que γ est un *segment géodésique*, ou une *géodésique*, reliant x et y si pour tout $t_0 \in [a, b]$, il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall t < t' \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], L(\gamma|_{[t, t']}) = d(\gamma(t), \gamma(t'))$.

Plus généralement, si I désigne un intervalle de \mathbb{R} , on dit qu'un chemin $\gamma : I \rightarrow X$ de classe \mathcal{C}^1 est une *géodésique* lorsque pour tout $t_0 \in I$, il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall t < t' \in I, L(\gamma|_{[t, t']}) = d(\gamma(t), \gamma(t'))$.

Cette définition signifie qu'une géodésique minimise localement la distance entre ses points.

Définition 1.3 Paramétrisation par longueur d'arc

Soit $\gamma : I \rightarrow X$ un chemin \mathcal{C}^1 .

On dit que γ est *paramétré par longueur d'arc* lorsque $\forall t, t' \in I, L(\gamma|_{[t,t']}) = |t - t'|$.

On n'a pas en général unicité des segments géodésiques.

Exemple 1.2 Non unicité des segments géodésiques

Dans la géométrie Sol, il n'y a pas unicité des segments géodésiques entre deux points. Par exemple, si V_+ et V_- sont deux vecteurs partenaires parfaits de T_0X , alors les géodésiques issues de 0 ayant pour vecteurs initiaux $V_+/\|V_+\|$ et $V_-/\|V_-\|$ relient toutes deux 0 à $E(V_+) = E(V_-)$.

1.1.3 Isométries

En géométrie euclidienne, il est intuitif de translater ou faire tourner les figures étudiées sans que cela ne les modifie. En géométrie non euclidienne, et en fonction du modèle utilisé, différentes transformations, appelées isométries, jouent ce même rôle. Il est alors fréquent de précéder l'utilisation d'un modèle par une étude de ces transformations.

Définition 1.4 Isométrie

Soit $g : X \rightarrow X$ une application.

On dit que g est une *isométrie* si g est bijective et vérifie : $\forall x, y \in X, d(g(x), g(y)) = d(x, y)$.

Propriété 1.1 Structure des isométries

L'ensemble des isométries d'un espace métrique forme un groupe pour la composition.

Lemme 1.1 Caractérisation des isométries par la longueur des chemins

Soit $g : X \rightarrow X$ une application bijective.

Alors g est une isométrie si et seulement si pour tout chemin $\mathcal{C}^1 \gamma : [a, b] \rightarrow X, L(g \circ \gamma) = L(\gamma)$.

Preuve.

Cela découle du fait que dans les espaces de longueur (étudiés ici), si $x, y \in X, d(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} L(\gamma)$, où $\Gamma_{x,y}$ est l'ensemble des chemins reliant x et y . ■

1.2 Géométrie sur l'hyperboloïde

On introduit la géométrie hyperbolique à travers le modèle qui lui donne son nom : l'hyperboloïde.

▣ Définition 1.5 *Modèle de l'hyperboloïde*

Le modèle de l'hyperboloïde \mathcal{H} désigne l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1 \text{ et } z > 0\}$$

muni de la métrique locale $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$.

On observe que si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, alors $|z| \geq 1$.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme quadratique associée à la métrique locale : $\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \langle u, v \rangle = u_x v_x + u_y v_y - u_z v_z$.

On commence par introduire les outils géométriques de base.

▣ Définition 1.6 *Segment et droite hyperboliques*

Soit A, B deux points de \mathcal{H} ,

u un vecteur unitaire (i.e. $\langle u, u \rangle = 1$) colinéaire à $B - A$.

On définit le *segment hyperbolique* $[A, B] = \{\text{ch}(t)A + \text{sh}(t)u \mid t \in [0, d(A, B)]\}$. Le vecteur u est appelé vecteur initial du segment $[A, B]$.

On définit de même la *droite hyperbolique* $(A, B) = \{\text{ch}(t)A + \text{sh}(t)u \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Pour justifier la bonne définition du segment hyperbolique $[A, B]$ et de la droite hyperbolique (A, B) , vérifions que $(A, B) \subset \mathcal{H}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, après avoir constaté que $\langle A, u \rangle = 0$, et en utilisant que $A \in \mathcal{H}$ et u unitaire :

$$\begin{aligned} \langle \text{ch}(t)A + \text{sh}(t)u, \text{ch}(t)A + \text{sh}(t)u \rangle &= \text{ch}^2(t)\langle A, A \rangle + \text{sh}^2(t)\langle u, u \rangle \\ &= -\text{ch}^2(t) + \text{sh}^2(t) \\ &= -1 \end{aligned}$$

De plus, le chemin $\gamma : t \mapsto \text{ch}(t)A + \text{sh}(t)u$ est continu, $|\gamma_z(t)| \geq 1$ d'après la remarque ci-dessus, et $\gamma_z(0) \geq 1$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma_z(t) \geq 1$.

Les notions et résultats suivants sont introduits de façon à prouver que les géodésiques de l'hyperboloïde sont les droites hyperboliques.

▣ Définition 1.7 *Angle hyperbolique*

Soit deux segments hyperboliques issus d'un même point, de vecteurs initiaux u, v .

L'*angle hyperbolique* entre ces segments est l'unique réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = \langle u, v \rangle$.

🔗 Propriété 1.2 *Géodésiques de l'hyperboloïde*

Soit $A, B \in \mathcal{H}$.

Le segment hyperbolique $[A, B]$ est l'unique géodésique reliant A et B .

≡ Preuve.

D'abord, $[A, B]$ est une géodésique allant de A à B car, en notant $\gamma : t \mapsto \text{ch}(t)A + \text{sh}(t)u$ défini sur $[0, d(A, B)]$, un calcul similaire à celui réalisé sous la définition 6 donne $L(\gamma) = d(A, B)$.

Pour l'unicité, on utilise le lemme suivant.

🔗 Lemme 1.2 Loi des cosinus hyperboliques

Soit Δ un triangle hyperbolique de sommets A, B, C ,

$$a = d(B, C), b = d(A, C), c = d(A, B),$$

γ l'angle hyperbolique entre $[A, C]$ et $[B, C]$.

Alors $\text{ch } c = \text{ch } a \text{ch } b - \text{sh } a \text{sh } b \cos \gamma$.

≡ Preuve.

Montrons que $\text{ch } d(A, B) = -\langle A, B \rangle$ en montrant que $\gamma(\text{argch}(-\langle A, B \rangle)) = B$.

$$\text{D'abord, } u = \frac{B + \langle A, B \rangle A}{\sqrt{\langle B + \langle A, B \rangle A, B + \langle A, B \rangle A \rangle}} = \frac{B + \langle A, B \rangle A}{\sqrt{\langle A, B \rangle^2 - 1}}.$$

En utilisant la relation $\text{ch}^2(\alpha) - \text{sh}^2(\alpha) = 1$, on obtient $\text{sh}(\text{argch}(-\langle A, B \rangle)) = \sqrt{\langle A, B \rangle^2 - 1}$.

Cela permet d'établir la formule souhaitée.

Maintenant, on peut établir la loi des cosinus hyperboliques :

$$\begin{aligned} \text{ch } c &= \text{ch } d(A, B) \\ &= -\langle A, B \rangle \\ &= -\langle \text{ch}(b)C + \text{sh}(b)u, \text{ch}(a)C + \text{sh}(a)v \rangle \end{aligned}$$

en utilisant les chemins $[C, A]$ et $[C, B]$, de vecteurs initiaux u, v

$$= -\text{ch } b \text{ch } a \langle C, C \rangle - \text{sh } b \text{sh } a \langle u, v \rangle$$

car $\langle C, u \rangle = \langle C, v \rangle = 0$

$$= \text{ch } a \text{ch } b - \text{sh } a \text{sh } b \cos \gamma$$

■

Comme la fonction $\gamma \mapsto \text{ch } a \text{ch } b - \text{sh } a \text{sh } b \cos \gamma$ est strictement croissante de $\text{ch}(a - b)$ à $\text{ch}(a + b)$ sur $[0, \pi]$, cela montre que $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$ si et seulement si $C \in [A, B]$.

Maintenant, si $\tilde{\gamma}$ est un chemin contenant un point $C \notin [A, B]$, en notant γ_1, γ_2 la portion de $\tilde{\gamma}$ avant et après C , on a $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \geq d(A, C) + d(C, B) > d(A, B)$. Donc $\tilde{\gamma}$ n'est pas une géodésique. ■

On observe que les géodésiques sont décrites par l'ensemble des intersections entre l'hyperboloïde \mathcal{H} et les plans vectoriels.

1.3 Modèles de la géométrie hyperbolique

Si le modèle de l'hyperboloïde est adapté pour obtenir une paramétrisation simple des géodésiques, d'autres manipulations peuvent être plus complexes. Cela motive l'introduction de différents modèles pour la géométrie hyperbolique. La démarche est la suivante : on donne un homéomorphisme entre l'hyperboloïde et un ensemble plus simple, puis on transfère la métrique de l'hyperboloïde. De cette façon, on obtient deux espaces métriques isométriques.

L'intérêt d'utiliser plusieurs modèles est que chacun fait ressortir des aspects différents de la géométrie hyperbolique. Certains modèles sont plus adaptés pour certains résultats, et on utilise les isométries pour transporter les résultats entre les modèles.

1.3.1 Le modèle de Klein

Définition 1.8 *Modèle de Klein*

On note Δ_K le disque unité ouvert de \mathbb{C} .
On considère l'homéomorphisme

$$h_K : \begin{cases} \Delta_K & \rightarrow \mathcal{H} \\ z = (x + iy) & \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}(x, y, 1) \end{cases}$$

Le *modèle de Klein* désigne l'ensemble Δ_K muni de la métrique ramenée par h_K , i.e. vérifiant, pour $z, w \in \Delta_K$, $d_{\Delta_K}(z, w) = d_{\mathcal{H}}(h_K(z), h_K(w))$.

Géométriquement, l'application h_K^{-1} est la projection stéréographique centrée en 0 de l'hyperbole sur le disque unité horizontal centré en $(0, 0, 1)$, puis ramené en le disque unité ouvert de \mathbb{C} centré en 0 à l'aide d'une projection orthogonale.

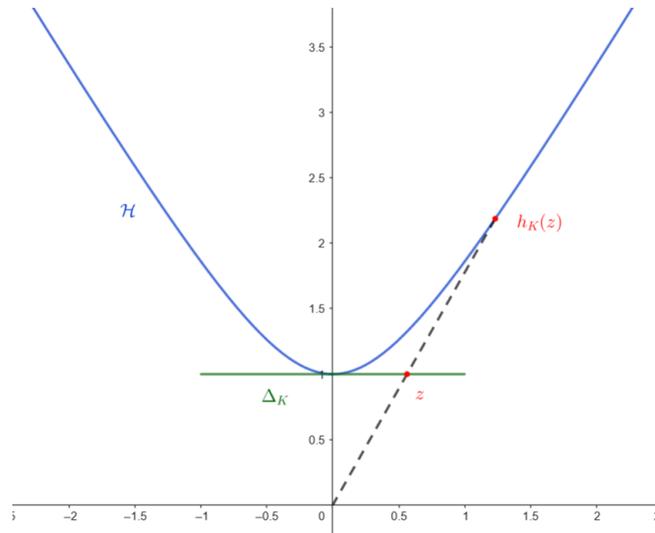


FIGURE 2 – Illustration de l'homéomorphisme utilisé entre le modèle de Klein et celui de l'hyperboloïde.

Propriété 1.3 *Géodésiques du modèle de Klein*

La géodésique reliant deux points $z, w \in \Delta_K$ est le segment euclidien $[z, w]$.

≡ Preuve.

On identifie Δ_K avec le plan horizontale $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$, de sorte que $w \in \Delta_K$ désigne le point $(\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w, 1) \in \mathbb{R}^3$. Si V est un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 , alors $v \in V \Leftrightarrow h_K(v) \in V$.

L'unique géodésique passant par $h_K(z)$ et $h_K(w)$ sur l'hyperboloïde est, d'après la remarque en fin de section précédente, l'intersection de \mathcal{H} avec le plan vectoriel V contenant $h_K(z)$ et $h_K(w)$. L'image de cette géodésique par h_K^{-1} est alors l'intersection de Δ_K avec V . Cette intersection est la corde de Δ_K contenant z et w . L'isométrie h_K envoie donc le segment euclidien $[z, w]$ sur le segment géodésique $[h_K(z), h_K(w)]$, et réciproquement. ■

Le modèle de Klein fournit une description très simple des géodésiques, mais pas des angles, car l'application h_K n'est pas conforme. Cela motive l'introduction des modèles de Poincaré.

1.3.2 Les modèles de Poincaré

📖 Définition 1.9 *Modèle du disque de Poincaré*

On note Δ_P le disque unité ouvert de \mathbb{C} .

On considère l'homéomorphisme

$$h_P : \begin{cases} \Delta_P & \rightarrow & \mathcal{H} \\ z = (x + iy) & \mapsto & \frac{1}{1-|z|^2}(2x, 2y, 1 + |z|^2) \end{cases}$$

Le *modèle du disque de Poincaré* désigne l'ensemble Δ_P muni de la métrique ramenée par h_P , i.e. vérifiant, pour $z, w \in \Delta_P$, $d_{\Delta_P}(z, w) = d_{\mathcal{H}}(h_P(z), h_P(w))$.

Géométriquement, l'application h_P^{-1} est la projection stéréographique centrée en -1 de l'hyperboloïde sur le disque unité ouvert de \mathbb{C} centré en 0.

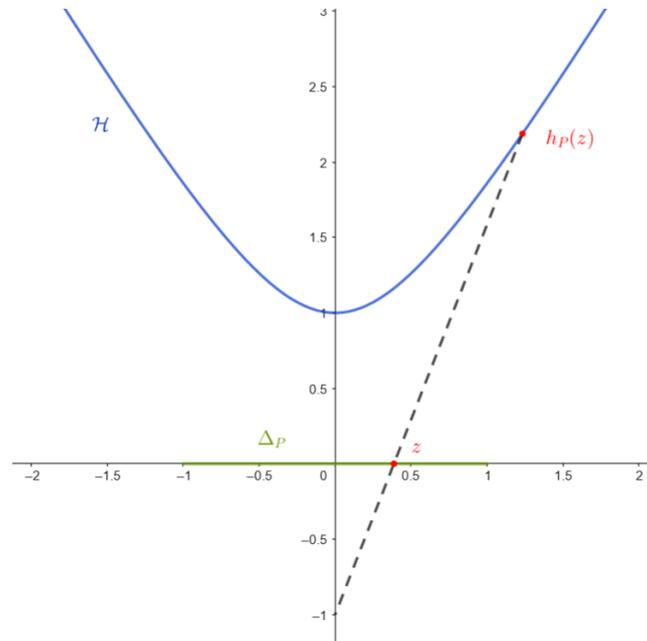


FIGURE 3 – Illustration de l'homéomorphisme utilisé entre le modèle de Klein et celui de l'hyperboloïde.

On vérifie par le calcul que la métrique locale de Δ_P est $ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$.

Propriété 1.4 *Géodésiques du modèle du disque de Poincaré*

Les géodésiques du disque de Poincaré sont les diamètres du cercle unité, et les arcs de cercles intersectant orthogonalement le cercle unité.

Preuve.

On note $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z > 0\}$ l'hémisphère Nord de la sphère unité euclidienne de \mathbb{R}^3 . On observe le modèle hyperbolique induit par les isométries h_P et h_K sur S .

D'abord, on envoie Δ_P sur S en utilisant la projection stéréographique h_P centrée en -1 . Cette application est conforme, donc les arcs de cercle dans Δ_P intersectant orthogonalement le cercle unité de \mathbb{C} sont envoyés sur les arcs de cercle de S intersectant orthogonalement l'équateur.

Ensuite, on envoie Δ_K sur S en utilisant h_K . L'application h_K se décompose en une projection orthogonale sur le plan $\{z = 1\}$, puis en une projection stéréographique centrée en 0 . En arrêtant la projection orthogonale sur S , l'image des géodésiques du disque de Klein (i.e. des segments euclidiens) sur S est donc l'ensemble des arcs de cercle intersectant orthogonalement l'équateur.

Les deux modèles ainsi induits sur S étant isométriques, leurs géodésiques sont les mêmes, ce qui permet d'obtenir les géodésiques du modèle du disque de Poincaré. ■

Le disque de Poincaré permet une description assez simple des géodésiques, ainsi que des angles, car ceux-ci correspondent aux angles euclidiens.

On introduit finalement le modèle du demi-plan de Poincaré pour déterminer le groupe des isométries de la géométrie hyperbolique. Par ailleurs, on utilisera ce modèle plus loin pour prouver un résultat.

Définition 1.10 *Modèle du demi-plan de Poincaré*

On note \mathbb{H} le demi-plan supérieur $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\} \subset \mathbb{C}$. On considère l'homéomorphisme

$$h_C : \begin{cases} \mathbb{H} & \rightarrow \Delta_P \\ z & \mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{cases}$$

Le *modèle du demi-plan de Poincaré* désigne l'ensemble \mathbb{H} muni de la métrique ramenée par h_C , i.e. vérifiant, pour $z, w \in \mathbb{H}$, $d_{\mathbb{H}}(z, w) = d_{\Delta_P}(h_C(z), h_C(w))$.

On vérifie par le calcul que la métrique locale associée à \mathbb{H} est $ds = \frac{|dz|}{\text{Im } z}$.

Théorème 1.1 *Isométries du demi-plan de Poincaré*

Le groupe des isométries de \mathbb{H} est l'ensemble

$$\left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, z \mapsto \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d} \mid ad-bc > 0, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Preuve.

On commence par vérifier que si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vérifient $ad - bc > 0$, alors l'application $g : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est une isométrie de \mathbb{H} sur lui-même, en observant par le calcul que $\frac{|g'(z)|}{\text{Im } g(z)} = \frac{1}{\text{Im } z}$. Ainsi, si γ est un chemin tracé dans \mathbb{H} , $L(g \circ \gamma) = L(\gamma)$. Le lemme 1 permet de conclure que g est une isométrie.

Montrons à présent le lemme suivant pour prouver la réciproque.

Lemme 1.3 *Formule de la distance*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{H}, \text{ch } d(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2 \text{Im } z_1 \text{Im } z_2}$$

Preuve.

On remarque que les deux membres de la formule sont invariants par les isométries de la même forme de g .

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$.

On explicite une isométrie g qui envoie z_1 et z_2 sur l'axe $i\mathbb{R}_+^*$. Si z_1 et z_2 se trouvent sur un même axe vertical, une translation horizontale de la forme $z \mapsto z + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ convient. Sinon, on note $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ les extrémités du demi-cercle contenant z_1, z_2 et intersectant orthogonalement l'axe réel. Alors l'application $z \mapsto -\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{\alpha'-\alpha}$ convient.

Il suffit donc de vérifier la formule pour $ip, iq \in i\mathbb{R}_+^*$, où $p < q \in \mathbb{R}$.

Soit $\gamma = x + iy : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ un chemin tel que $\gamma(0) = ip$ et $\gamma(1) = iq$. Alors :

$$L(\gamma) = \int_0^1 \frac{|x'(t) + iy'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln \frac{q}{p}$$

En outre, on a égalité lorsque $\gamma : t \mapsto tiq + (1-t)ip$. Donc $d(ip, iq) = \ln \frac{q}{p}$. On en déduit la formule du lemme. ■

De cette preuve découle la propriété suivante.

Propriété 1.5 *Géodésiques du demi-plan de Poincaré*

Les géodésiques du modèle du demi-plan de Poincaré sont les droites verticales et les demi-cercles intersectant orthogonalement l'axe réel.

Soit maintenant φ une isométrie de \mathbb{H} . Comme φ envoie les géodésiques sur les géodésiques, on a vu au cours de la preuve du lemme qu'il existe $g : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0$ telle que $g \circ \varphi(i\mathbb{R}_+^*) = i\mathbb{R}_+^*$. Quitte à remplacer g par kg et/ou par $-\frac{1}{g}$, on peut supposer que $g \circ \varphi$ laisse stable les demi-droites $]0, i]$ et $[i, \infty[$. Comme $g \circ \varphi$ est une isométrie, elle fixe tous les points de $i\mathbb{R}_+^*$.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{H}$. On note $g \circ \varphi(z) = u + iv$.

Comme g est une isométrie, pour tout $t > 0$, $d(z, it) = d(g \circ \varphi(z), it)$. En appliquant le lemme à cette égalité, et en réduisant au même dénominateur, on en déduit :

$$\forall t > 0, (x^2 + y^2)v + (-u^2 + v^2)y + (v - y)t^2 = 0$$

De là, $v = y$ et $x = \pm u$, donc $g \circ \varphi(z) = z$ ou $g \circ \varphi(z) = -\bar{z}$. Une des deux équations vaut pour tout $z \in \mathbb{H}$:

- $\{z \in \mathbb{H} \cap \{\text{Re } z > 0\} \mid g \circ \varphi(z) = z\}$ est un ouvert fermé du premier quadrant, qui est connexe, donc une des deux équations est vérifiée dans tout le premier quadrant ;

— Comme $g \circ \varphi$ est une bijection, la même équation est vérifiée dans l'autre quadrant.

Comme $g^{-1} : z \mapsto \frac{-dz+b}{cz-a}$, $\varphi(z) = g^{-1}(z)$ ou $\varphi(z) = g^{-1}(\bar{z})$ est de la forme souhaitée. ■

On transporte enfin ce résultat dans le disque de Poincaré en utilisant le fait suivant : si φ est une isométrie de \mathbb{H} , alors $\psi = h_C \circ \varphi \circ h_C^{-1}$ est une isométrie de Δ_P .

🔴 **Théorème 1.2** *Isométries du disque de Poincaré*

Le groupe des isométries de Δ_P est l'ensemble

$$\left\{ z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, z \mapsto \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}} \mid |a|^2 - |c|^2 > 0, a, c \in \mathbb{C} \right\}$$

Les deux modèles de Poincaré sont pratiques pour manipuler les points situés à l'infini : le cercle unité pour le disque de Poincaré, et l'axe réel ainsi que le point ∞ pour le demi-plan de Poincaré. Plus particulièrement, le demi-plan de Poincaré permet d'attribuer un statut particulier à un des points situé à l'infini. C'est cette caractéristique qu'on exploitera lors de l'utilisation de ce modèle plus loin.

2 Interprétation hyperbolique du théorème des sept cercles

On revient au théorème des sept cercles, énoncé au début de cette partie.

On commence par interpréter ce résultat dans le modèle de Klein, car les segments y sont des géodésiques. On veut donc montrer que les trois géodésiques reliant les sommets opposés de l'hexagone sont concourantes.

Cette première étape permet ensuite de transposer le résultat au modèle du disque de Poincaré. Les côtés des hexagones ainsi que les trois segments reliant ses sommets opposés deviennent alors des arcs de cercles (ou éventuellement des diamètres). Dans ce modèle, il nous faut encore interpréter les cercles tangents pour pouvoir proposer un énoncé faisant intervenir des objets manipulables de la géométrie hyperbolique. Pour cela, on introduit la notion d'horodisque.

Intuitivement, un horodisque désigne un cercle centré en un point situé à l'infini, et de rayon infini. Les fonctions de Busemann se substituent alors à la distance pour pouvoir se ramener à des grandeurs finies.

Définition 2.1 *Fonction de Busemann*

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Delta_P$ une géodésique paramétrée par longueur d'arc. On note $\zeta = \gamma(+\infty)$. On appelle *fonction de Busemann* associée à γ, ζ l'application

$$b_{\gamma, \zeta} : \begin{cases} \Delta_P & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \lim_{t \rightarrow +\infty} (d(z, \gamma(t)) - t) \end{cases} .$$

Cette fonction est bien définie car l'application $t \mapsto d(z, \gamma(t)) - t$ est décroissante et minorée. En effet, soit $t < t' \in \mathbb{R}$.

D'une part, en utilisant l'inégalité triangulaire, $d(z, \gamma(t')) - t' \leq d(z, \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(t')) - t' = d(z, \gamma(t)) - t$, car γ est paramétré par longueur d'arc.

D'autre part, encore par inégalité triangulaire, $d(z, \gamma(t)) - t \geq d(\gamma(t), \gamma(0)) - d(\gamma(0), z) - t = -d(\gamma(0), z)$.

Lemme 2.1 *Indépendance de la géodésique choisie*

Deux géodésiques $\gamma, \tilde{\gamma}$ telles que $\zeta := \gamma(+\infty) = \tilde{\gamma}(+\infty)$ sont associées à la même fonction de Busemann.

On note donc $b_\zeta = b_{\gamma, \zeta} = b_{\tilde{\gamma}, \zeta}$.

Preuve.

On se place dans le modèle du demi-plan de Poincaré, en envoyant ζ en ∞ . On commence par étudier deux géodésiques partant d'une même hauteur à $t = 0$.

Soit $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ une géodésique telle que $\gamma_0(0) = i$ et $\gamma_0(+\infty) = \infty$. Soit $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ une autre géodésique verticale telle que $\text{Im } \gamma_1(0) = 1$ et $\gamma_1(+\infty) = \infty$.

On compare $b_{\gamma_0, \zeta}(z)$ et $b_{\gamma_1, \zeta}(z)$ pour $z \in \mathbb{H}$. Pour cela, soit $c_t : s \mapsto s\gamma_0(t) + (1-s)\gamma_1(t)$ le segment euclidien reliant $\gamma_0(t)$ à $\gamma_1(t)$. On calcule :

$$L(c_t) = \int_0^1 \frac{|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)|}{\text{Im}(s\gamma_0(t) + (1-s)\gamma_1(t))} ds = \frac{K}{t-1}$$

où $K = \gamma_0(t) - \gamma_1(t)$ est une constante indépendante de t .

De là, $|d(z, \gamma_0(t)) - d(z, \gamma_1(t))| \leq d(\gamma_0(t), \gamma_1(t)) \leq L(c_t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Soit finalement $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ une géodésique telle que $\gamma(0) \in i\mathbb{R}_+^*$ et $\gamma(+\infty) = \infty$. On pose $c_t : s \mapsto s\gamma_0(t) + (1-s)\gamma_2(t)$. Alors :

$$L(c_t) = \int_0^1 \frac{|\gamma_0(t) - \gamma_2(t)|}{s|\gamma_0(t)| + (1-s)|\gamma_2(t)|} ds = K \ln \frac{|\gamma_0(t)|}{|\gamma_2(t)|}$$

De là, $|d(z, \gamma_0(t)) - d(z, \gamma_2(t))| \leq d(\gamma_0(t), \gamma_2(t)) \leq L(c_t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. ■

■ Définition 2.2 Horosphère

L'horosphère centrée en ζ associée à $r \geq 0$ désigne l'ensemble $H(\zeta, r) = \{z \in \Delta_P \mid b_\zeta(z) = r\}$.

L'horosphère correspond bien à un cercle tangent au cercle unité en ζ . Pour s'en convaincre, on repasse dans le modèle du demi-plan de Poincaré en envoyant ζ sur ∞ , et on constate que l'horosphère correspond à une droite horizontale.

Tous les objets nécessaires ayant été introduits, on peut formuler et prouver un théorème impliquant le théorème des sept cercles.

■ Définition 2.3 Périmètre alterné

Soit P un hexagone idéal, i.e. de sommets $\zeta_1, \dots, \zeta_6 \in \partial\Delta_P$.

On note $z_1, \dots, z_6 \in \Delta_P$ tels que z_i se trouve sur le côté d'extrémités ζ_i, ζ_{i+1} (z_6 est entre ζ_6 et ζ_1).

Le *périmètre alterné* de P est la quantité $\mathcal{A}(P) = [b_{\zeta_2}(z_1) - b_{\zeta_2}(z_2)] - [b_{\zeta_3}(z_2) - b_{\zeta_3}(z_3)] + \dots - [b_{\zeta_1}(z_6) - b_{\zeta_1}(z_1)]$.

Il est indépendant des points z_1, \dots, z_6 choisis.

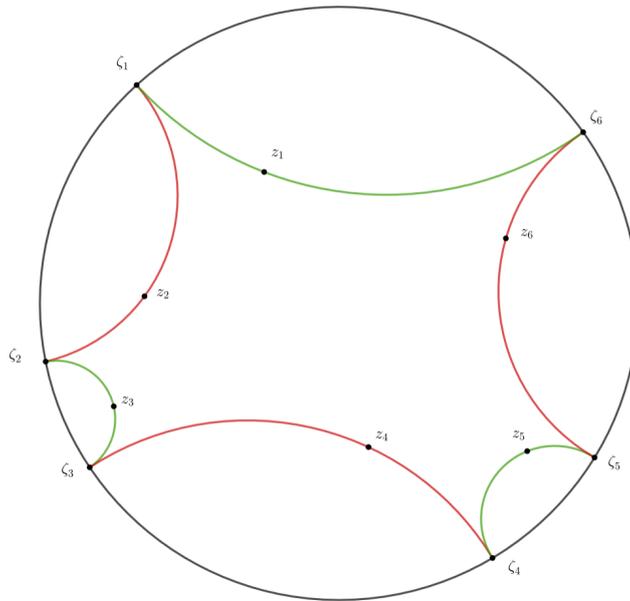


FIGURE 4 – Notations de la définition du périmètre alterné. Les "longueurs" des côtés verts sont comptées positivement tandis que les "longueurs" des côtés rouges le sont négativement.

Justifions l'indépendance du périmètre alterné vis-à-vis des points choisis. Supposons qu'on décale z_1 en \tilde{z}_1 , plus proche de ζ_1 . Alors $b_{\zeta_1}(z_1)$ diminue autant que $b_{\zeta_2}(z_1)$ augmente. En effet :

$$\begin{aligned} b_{\zeta_1}(\tilde{z}_1) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [d(\tilde{z}_1, \gamma(t)) - t] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [d(z_1, \gamma(t)) - d(\tilde{z}_1, z_1) - t] \\ &= b_{\zeta_1}(z_1) - d(\tilde{z}_1, z_1) \end{aligned}$$

Par le même raisonnement, $b_{\zeta_2}(\tilde{z}_1) = b_{\zeta_2}(z_1) + d(\tilde{z}_1, z_1)$.

Théorème 2.1 *Résultat impliquant le théorème des sept cercles*

Soit P un hexagone idéal.

On note T_P le triangle hyperbolique délimité par les trois géodésiques reliant les sommets opposés de P .

Alors le périmètre alterné de P est, au signe près, deux fois le périmètre de T_P .

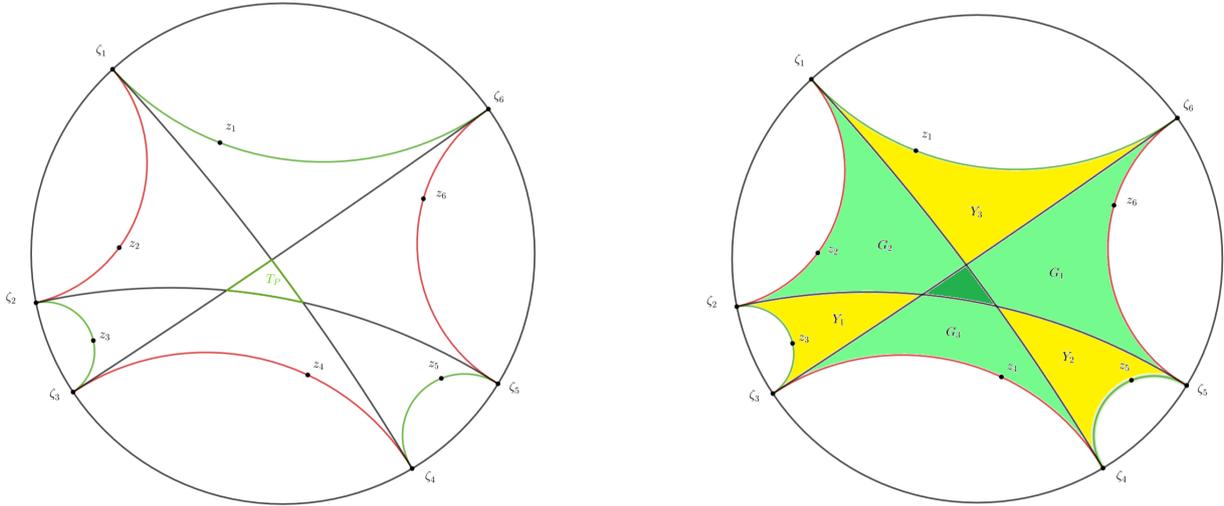


FIGURE 5 – Illustration du théorème et notations de la preuve.

Preuve.

On introduit une notion de périmètre alterné pour les triangles G_i et Y_i , dits semi-idéaux car deux de leurs trois sommets sont idéaux.

Si V est un triangle semi-idéal de sommet z et de sommets idéaux $\zeta, \tilde{\zeta}$, on note z_1, z_2, z_3 trois points se situant respectivement sur le côté entre ζ et z , entre z et $\tilde{\zeta}$ et entre $\tilde{\zeta}$ et ζ . On définit ainsi $\mathcal{A}(V) = d(z_1, z) + d(z_2, z) + b_\zeta(z_1) + b_{\tilde{\zeta}}(z_2) - b_\zeta(z_3) - b_{\tilde{\zeta}}(z_3)$. Le périmètre alterné est indépendant des points z_1, z_2, z_3 choisis, par un raisonnement similaire à celui proposé précédemment.

On observe ensuite qu'il existe trois isométries I_1, I_2, I_3 telles que $I_1(Y_1) = G_1, I_2(Y_2) = G_2$ et $I_3(Y_3) = G_3$. En effet, on utilise une première isométrie qui envoie le sommet commun des deux triangles Y_i et G_i en 0, puis on applique une rotation. De là, on déduit que $\mathcal{A}(Y_i) = \mathcal{A}(G_i)$.

Donc $\mathcal{A}(Y_1) + \mathcal{A}(Y_2) + \mathcal{A}(Y_3) - \mathcal{A}(G_1) - \mathcal{A}(G_2) - \mathcal{A}(G_3) = 0$. En effectuant toutes les simplifications et en regroupant les termes judicieusement, on obtient $\pm \mathcal{A}(P) = 2\mathcal{P}(T_P)$. ■

Pour conclure, on justifie que ce théorème implique effectivement le théorème des sept cercles.

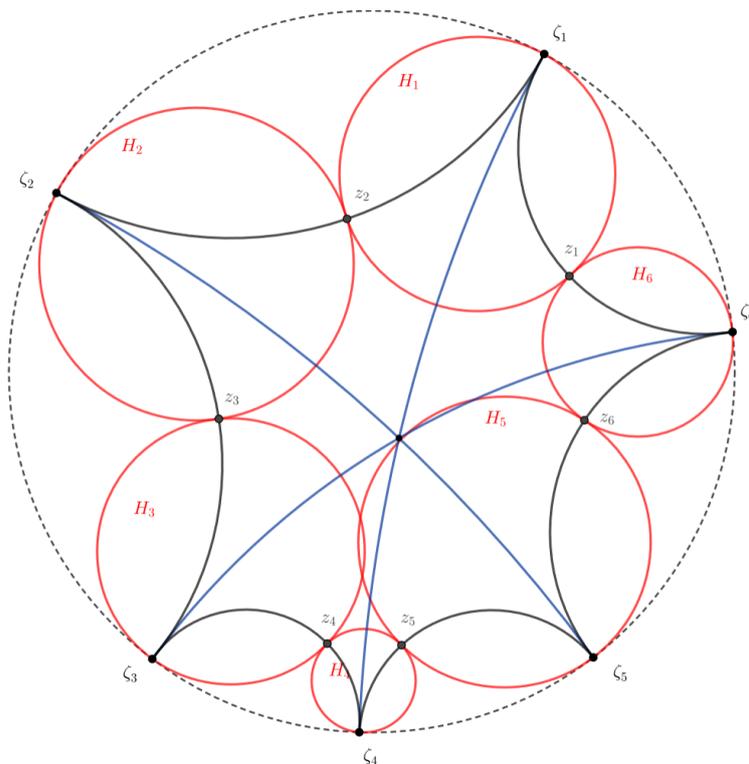


FIGURE 6 – Illustration du théorème dans le cas où les horosphères sont consécutivement tangentes.

Le fait qui reste à justifier est que le point en lequel deux horosphères sont tangentes se situe sur la géodésique reliant les deux centres idéaux de ces horosphères. Justifions par exemple que z_1 est sur la géodésique reliant ζ_1 à ζ_6 .

Pour cela, on passe dans le demi-plan de Poincaré en envoyant ζ_6 en ∞ et ζ_1 en 0. La géodésique reliant ζ_1 et ζ_6 correspond alors à l'axe $i\mathbb{R}_+$, l'horosphère centrée en ζ_1 correspond à une sphère tangente à l'axe réel en 0, et l'horosphère centrée en ζ_6 correspond à une droite horizontale.

On observe alors que ces deux horosphères ne peuvent être tangentes que sur l'axe $i\mathbb{R}_+$, i.e. sur la géodésique reliant ζ_1 et ζ_6 .

Ce fait étant établi, on conclut en appliquant le théorème à l'hexagone idéal en utilisant les points de tangence sur chaque côté : les fonctions de Busemann se compensent, ce qui donne que le périmètre du triangle T_P est nul : il est réduit à un point !

3 Références

Le premier article est un article de vulgarisation qui présente la démarche suivie. Les références suivantes permettent de définir précisément les notions utilisées.

- Drach, Schwartz, A Hyperbolic View of the Seven Circles Theorem. *Math Intelligencer* 42, 61–65 (2020)
- Bridson, Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer, 81-92, 2-14, 18-21 (1999)
- Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer, 126-138 (1993)
- Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer, 127-140 (2019)

Ce travail a été mené en compagnie de Rémi COULON à l'IMB à Dijon durant une partie de mon stage de fin de L3. Si vous voulez explorer la géométrie non-euclidienne, vous pouvez visiter sa page perso, ainsi que le site <https://www.3-dimensional.space/index.html> sur lequel il a travaillé pour offrir une visualisation de la géométrie non-euclidienne grâce à la réalité virtuelle.