

ENS DE RENNES
UNIVERSITÉ RENNES 1

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
RAPPORT DE STAGE

Construction de solutions radiatives
approchées des équations d'Einstein



école
normale
supérieure

Auteur :

Antoine PEYRONNET ¹

Encadrant:

Arthur TOUATI ²

1. élève à l'École Normale Supérieure de Rennes, 35170 Bruz (antoine.peyronnet@ens-rennes.fr)

2. Doctorant au CMLS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz (UMR 7640), Ecole polytechnique, Institut Polytechnique de Paris, 91128 Palaiseau Cedex, France (arthur.touati@polytechnique.edu)

Table des matières

1	Remerciements	2
2	Introduction	2
3	Géométrie Lorentzienne	3
3.1	Rappels	3
3.2	Espaces tangents, fibrés tangents, cotangents	3
3.3	Tenseurs et métriques	5
3.4	Opérations et Contraction	6
3.5	Dérivation de champs de tenseur	7
3.6	Connexion	8
3.7	Transports parallèles et geodésiques	9
3.8	Tenseur de courbure	10
4	Relativité générale	12
4.1	Formulation Lagrangienne	12
4.2	Equations d'Einstein	15
4.3	Le problème de Cauchy en relativité générale	20
5	Linéarisation des équations d'Einstein	21
5.1	Ondes gravitationnelles	25
5.2	Les limites du linéaires	27
6	Recherche de solutions radiatives dans les équations d'Einstein	28
6.1	Développement asymptotique du tenseur de Ricci	28
6.2	Coordonnées radiatives	30
6.3	Résolution pour les ondes approchées d'ordre zéro	30
6.4	Résolution pour les ondes approchées d'ordre 1	31
6.5	Perte d'énergie radiative	35
6.6	Résolution approximatives à l'ordre 1 des équations d'Einstein-Maxwell	36
7	Synthèse	37
8	Appendices	38
	Références	39

1 Remerciements

Je tiens à remercier l'ensemble de l'équipe du Centre de Mathématiques Laurent Schwartz de l'Ecole Polytechnique de m'avoir accueilli chaleureusement pendant ce mois et demi de stage. Je ne peux qu'exprimer ma profonde gratitude d'avoir été dans un tel environnement stimulant et ouvert. Tout ceci a contribué à de multiples occasions d'interactions riches notamment lors des pauses déjeuner et des pauses cafés ce qui diffusaient une très belle émulation.

Je tiens à adresser des remerciements spécifiques à l'ensemble des doctorants que j'ai pus rencontrer notamment Gabriel Ribeiro, Lucas Gierczack, Etienne Bonnafoux, et Lucas Ertzbischoff. Je leur souhaite une excellente continuation dans leur thèse et après.

Enfin, je remercie du fond du coeur Arthur, mon directeur de stage, qui a fait preuve de beaucoup d'attention, de disponibilité, de patience, rigueur et écoute dans la réponse à mes nombreuses questions et d'investissement pour mon stage à la fois en terme du contenu mathématiques jusqu'aux détails d'organisations notamment pour les séances de travail. Je le remercie très chaleureusement de m'avoir initié à la relativité générale, domaine qui ne fait que mesurer de plus près la beauté de la Nature !

2 Introduction

Nous introduirons d'abord les fondements mathématiques de la relativité générale menant par la suite à décrire les équations d'Einstein

Après cet exposé générale, nous aurons les outils nécessaires pour aborder le tout début du domaine des équations à dérivées partielles en relativité.

Souvent dans le cas linéaire, pour résoudre certaines équations différentielles nous préférons obtenir une approximation de la solution générale. Par exemple, c'est ce que nous faisons déjà pour des problèmes de physique comme le mouvement d'un pendule.

Cependant l'étude que nous établissons détient sa spécificité du fait que les équations d'Einstein sont non-linéaires.

Nous nous attacherons à bien montrer qu'une méthode de linéarisation de l'équation différentielle s'avère inefficace et qu'il faut établir une méthode adaptée à l'équation différentielle elle-même pour obtenir des familles de solutions.

Nous analyserons ainsi une méthode proposée par Yvonne Choquet-Bruhat dans [1] pour réaliser des solutions approchées d'une certaine classe que l'on nomme **les solutions radiatives** où un jeu de coordonnées adaptées impose certaines conditions sur les solutions possibles.

Ce travail s'effectue dans le cadre du stage de fin de première année de l'Ecole Normale Supérieure de Rennes réalisé entre Mai et Juin 2022.

3 Géométrie Lorentzienne

3.1 Rappels

La physique newtonnienne pose ses fondements géométriques sur la géométrie euclidienne. Nous définissons de façon universelle un espace à trois dimensions réglé par un produit scalaire. Au contraire le point de vue de la relativité générale nuance ce propos, en proposant un mariage entre la dimension du temps et l'espace donnant lieu à considérer un nouvel espace : l'espace-temps et par la suite d'introduire un point de vue plus local où le produit scalaire euclidien est en quelque sorte remplacé par une forme bilinéaire symétrique qui agit localement sur les points de l'espace temps.

De manière à rendre compte de ceci, on introduit la **théorie de la géométrie différentielle**. Nous allons étendre la notion de dérivée à des objets relatifs aux variétés.

L'extrême base de la géométrie différentielles abordée dans le cours de calcul différentiel à savoir les notions de variétés, cartes locales, atlas d'une part et le produit tensoriel d'autre part sont supposés connus.

3.2 Espaces tangents, fibrés tangents, cotangents

Soit \mathcal{M} une variété C^r de dimension n et soit $p \in \mathcal{M}$.

Nous voulons étendre la notion de dérivée aux fonctions C^∞ en un point p de la variété. C'est-à-dire qu'elle vérifie la linéarité (1) et qu'elle vérifie la même propriété que la règle de Leibniz pour la dérivation (2)

Definition 1. *une dérivation D en un point p est une application*

$$D : X(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

¹ *satisfaisant les propriétés suivantes pour toutes les fonctions f et g dans $X(p)$:*

1. $D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. $D(fg) = g(p)Df + f(p)Dg$

Une fois avoir défini les dérivations, nous pouvons les voir comme formant un espace vectoriel ;

Théorème-Définition 1. *L'ensemble des dérivations en un point p de la variété \mathcal{M} est un espace vectoriel de dimension n noté $T_p\mathcal{M}$.*

On nommera par la suite cet espace, l'espace tangent à \mathcal{M} en p

Dans l'exercice suivant, nous allons donner une vision plus géométrique de la dérivation en p :

Exercice 1. *Soit γ une courbe C^r passant par p
i.e il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathcal{M}, \gamma(0) = p$$

1. *Montrer que l'application $D_\gamma : f \longrightarrow (f \circ \gamma)'(0)$ est une dérivation*

1. $X(p)$ l'algèbre des fonctions de \mathcal{M} dans \mathbb{R} localement C^r en p

2. Montrer que pour tout champs de vecteur \mathbf{X} il existe une certaine courbe γ telle que : $D_\gamma f = X(f)$

Ainsi on pourra interpréter $T_p \mathcal{M}$ comme l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes tracées sur \mathcal{M} et passant par p . On notera ainsi ce vecteur tangent par $\dot{\gamma}$.

Introduisons une convention de sommation que nous utiliserons sans modération par la suite.

Remarque 1. La convention de sommation d'Einstein permet de simplifier les expressions de sommations.

Nous éliminons ainsi le signe « \sum » quand le même indice est répété "en haut" et "en bas".

par exemple nous écrirons :

$$\alpha_i x^i$$

pour

$$\sum \alpha_i x^i$$

Par convention,

1. on réserve les lettre alphabétiques pour les indices de sommations lorsqu'on veut spécifier que l'on effectue la somme sur des entiers
2. et les lettres grecques pour une somme quelconque

Definition 2. Soit \mathcal{M} une variété C^r de dimension n . On définit le fibré tangent $T\mathcal{M}$ comme l'ensemble des vecteurs tangents à \mathcal{M} , c'est-à-dire

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p \mathcal{M}$$

Notons par π l'application naturelle²

$$\pi : T\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

qui à un vecteur tangent de $T_p \mathcal{M}$ associe le point $p \in \mathcal{M}$

Nous introduisons ainsi la notion de champs de vecteur

Definition 3. Un champ de vecteurs C^r est une application C^r $\mathbf{X} : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ telle que

$$\pi \circ \mathbf{X} = Id$$

Nous retiendrons que dans une carte locale, les champs de vecteurs sont tous de la forme

$$\alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Definition 4. Soit \mathcal{M} une variété C^r de dimension n . On définit pour tout $p \in \mathcal{M}$; l'espace cotangent que l'on note $T_p^* \mathcal{M}$, l'espace dual de $T_p \mathcal{M}$.

Le fibré cotangent est alors défini par

$$T^* \mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^* \mathcal{M}$$

2. nous faisons un abus de notation avec la définition du π utilisée pour le fibré tangent

Notons par π l'application naturelle

$$\pi : T^*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

qui a un vecteur tangent de $T_p^*\mathcal{M}$ associe le point $p \in \mathcal{M}$

Nous introduisons ainsi la notion de 1-forme.

Definition 5. Une 1-forme est une application $\omega : \mathcal{M} \longrightarrow T^*\mathcal{M}$ telle que

$$\pi \circ \omega = Id$$

Nous retiendrons que dans une carte locale, les champs de vecteurs sont tous de la forme

$$\alpha^i(p)dx^i_p$$

3.3 Tenseurs et métriques

On donne alors un système de coordonnées (x_α) défini sur un ouvert \mathcal{U} de la variété \mathcal{M} .

On peut alors définir les champs de vecteurs $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ formant une base de $T_p\mathcal{M}$ et les 1-formes dx^α qui forment une base de $(T\mathcal{M})^*$ et sont les formes duales associées respectivement aux ∂_α

Donc nous avons la relation suivante : $dx^\alpha(\partial_\beta) = \delta_\beta^\alpha$

Ainsi si T est un tenseur de type (r, s) , il s'exprime localement comme :

$$T = T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} \partial_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\alpha_r} \otimes dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s}$$

$T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$ sont donc les composantes du tenseur T dans la base $\partial_\alpha, dx^\beta$ et s'obtient alors :

$$T_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r} = T(dx^{\alpha_1}, \dots, dx^{\alpha_r}, \partial_{\beta_1}, \dots, \partial_{\beta_s})$$

Remarquons bien que le tenseur T étant de type (r, s) il s'applique sur r 1-formes et s champs de vecteurs.

Remarque 2. Un champ de vecteurs est donc un champ de tenseurs de type $(1, 0)$ et une 1-forme est un champ de tenseurs de type $(0, 1)$.

Definition 6. Une métrique \mathbf{g} sur \mathcal{M} est un champ de tenseurs de type $(0, 2)$ tel que pour tout $p \in \mathcal{M}$, \mathbf{g}_p est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $T_p\mathcal{M}$

De plus, nous noterons que dans un système de coordonnées :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

qui s'écrira par la suite :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Definition 7. On dira que $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ est une variété **Lorentzienne** lorsque en tout point $p \in \mathcal{M}$, \mathbf{g}_p a pour signature

$$(-1, +1, \dots, +1)$$

Soient $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété Lorentzienne, $p \in \mathcal{M}$ et $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$. Alors on dit que \mathbf{X} est

1. un vecteur de type espace si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$
2. un vecteur de type temps si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0$
3. un vecteur de type lumière si $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$

Remarque 3. *La métrique c'est ce qui va définir l'espace elle intervient donc partout : c'est à dire même dans il y a toujours la métrique*

Remarque 4. *L'espace de Minkowski $(\mathcal{M}, \mathbf{g}) = (\mathbb{R}^{1+n}, m)$ muni de la métrique de Minkowski est une variété Lorentzienne de dimension $1 + n$. Dans les coordonnées cartésiennes de \mathbb{R}^{1+n} m est donnée par*

$$m = -(dt)^2 + (dx^1)^2 + \dots (dx^n)^2$$

Puisque \mathbf{g} est non dégénérée dans un système de coordonnées locales (x^α) sa matrice de composantes $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$ est inversible. Nous noterons les composantes de sa matrice inverses $\mathbf{g}^{\alpha\beta}$.

Elles vérifient donc les relations suivantes :

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta}\mathbf{g}^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$$

Proposition 3.1. *Dans le système de coordonnées locales choisi (x^α) le tenseur de coordonnées $\mathbf{g}^{\alpha\beta}$ définit un $(2,0)$ -tenseur appelé métrique inverse. Ce tenseur est noté \mathbf{g}^{-1} .*

Nous retrouvons ce que nous nous étions fixés d'étudier en (3.1). Nous remarquons que nous avons adopté un formalisme plus "précis" dit crûment, que celui de la géométrie euclidienne et qu'il est davantage adapté à saisir les spécificités et propriétés locales de la variété.

3.4 Opérations et Contraction

Familiarisons nous avec quelques opérations que nous allons par la suite utiliser plusieurs fois.

Les opérations de "monter" ou "descendre" les indices permettent de changer le type (r, s) d'un tenseur sans changer son argument (qui est $r + s$).

Le but est de pouvoir associer à un (r, s) -tenseur \mathcal{T} , un $(r - 1, s + 1)$ -tenseur ou un $(r + 1, s - 1)$ -tenseur.

Nous "montons" l'indice lorsque nous avons associé au tenseur, un tenseur prenant un argument en plus en tant que champs de vecteur et a perdu un argument 1-forme Généralement nous réalisons cette opération avec les composantes de la métrique \mathbf{g} (voir l'exemple ci-après)

Nous "descendons" l'indice lorsque nous avons associé au tenseur, un tenseur prenant un argument en plus en tant que 1-forme et a perdu un argument champs de vecteur.

Généralement nous réalisons cette opération avec les composantes de la métrique inverse \mathbf{g}^{-1} .

Donnons un exemple concret : un tenseur T de type $(2, 0)$ dont les composantes sont notées $T^{\alpha\beta}$ dans un système de coordonnées (x^α) peut être associé par exemple à un tenseur :

1. un $(1, 1)$ -tenseur dont les composantes $T_\beta^\alpha = \mathbf{g}_{\beta\gamma} T^{\alpha\gamma}$
Ou bien encore
un $(1, 1)$ -tenseur dont les composantes $T_\beta^\alpha = \mathbf{g}_{\alpha\gamma} T^{\gamma\alpha}$
Dans tous les cas nous avons descendu un indice
2. un $(0, 2)$ -tenseur dont les composantes $T_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha\gamma} \mathbf{g}_{\beta\delta} T^{\gamma\delta}$
Nous avons descendu deux fois les indices

De même une opération très souvent utilisées sera la contraction par rapport à une paire d'indices où l'un est contravariant (associé à un champ de vecteur) et l'autre est covariant (associé à une 1-forme). Par exemple, soit T un (r, s) -tenseur, on note $C_1^1(T)$ le champ de tenseur de type $(r - 1, s - 1)$ obtenu en contractant le premier indice covariant avec le premier indice contravariant

$$C_1^1(T) = T_{kj_2 \dots j_s}^{ki_2 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_2} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

on peut définir de la même manière $C_k^l(T)$

De façon prosaïque c'est comme si nous "retirions" dans chaque terme du tenseur mis sous forme de somme de produit tensoriel le l -ième champ de vecteur qui apparaissait avec la r -ième 1 forme.

Enfin, nous introduirons par la suite es opérateurs suivant : Tr , $grad$, div , respectivement la trace, le gradient, la divergence.

Pour la trace, nous faisons "baisser" un indice en transformant un tenseur T d'argument 2 en un scalaire. Par exemple si T est de type $(2, 0)$:

$$Tr_{\mathbf{g}}(T) = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}$$

Remarque 5. *Chaque opérateur contient des composantes de la métrique de départ \mathbf{g} . La métrique intervient partout. Nous verrons dans les parties ultérieures que nous définissons les mêmes opérations (D'Alembertien etc...) auxquels nous sommes habitués mais en veillant à l'exprimer avec la métrique de notre espace*

3.5 Dérivation de champs de tenseur

Nous savons dériver des fonctions scalaires et des champs de vecteur. Nous pouvons alors dériver des tenseurs

Une dérivation de tenseurs est une famille d'applications

$$D_s^r : T_s^r \mathcal{M} \longrightarrow T_s^r \mathcal{M}$$

telle que :

1. pour tout $(A, B) \in T_{s_1}^{r_1}(\mathcal{M}) \times T_{s_2}^{r_2}(\mathcal{M})$ $D_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(A \otimes B) = A \otimes D_{s_2}^{r_2}(B) + D_{s_1}^{r_1}(A) \otimes B$
2. pour toute contraction C_l^k et $A \in T_s^r(\mathcal{M})$, on a $D_{s-1}^{r-1}(C_l^k(A)) = C_l^k(D_s^r(A))$

3.6 Connexion

Nous avons maintenant besoin de décrire une dérivation sur les champs de vecteur : cette structure sera la connexion sur une variété.

Definition 8. Une connexion \mathbf{D} sur \mathcal{M} est une application de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{D} : T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} &\longrightarrow T\mathcal{M} \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\longmapsto \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \end{aligned}$$

telle que $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ est $C^\infty(\mathcal{M})$ -linéaire, $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ est \mathcal{R} -linéaire et pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, on a

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = f\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \mathbf{X}(f)\mathbf{Y}$$

Soit \mathbf{D} une connexion sur une variété \mathcal{M} et soit x^i un système de coordonnées locales. On décompose alors :

$$\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{Y} = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Par les propriétés de la connexion (dire lesquelles)

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

On notera ainsi, Γ_{jk}^i , nommé symboles de Christoffels, les symboles apparaissant de la façon suivante :

$$\mathbf{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Ce sont des fonctions

Le théorème suivant permet de choisir une connexion très naturelle avec la métrique \mathbf{g} que nous choisissons sur notre variété \mathcal{M} .

Definition 9. On dira qu'une connexion est sans torsion lorsque pour tout i, j, k :

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$$

On montre que cette définition équivaut à dire que pour tout champ de vecteur \mathbf{X}, \mathbf{Y}

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$$

Le théorème suivant permet de choisir une connexion très naturelle avec la métrique \mathbf{g} que nous choisissons sur notre variété \mathcal{M}

Théorème 3.2. Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété munie d'une métrique. Il existe une unique connexion \mathbf{D} sur \mathcal{M} telle que :

- \mathbf{D} est sans torsion, c'est-à-dire vérifie : $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$
- $\mathbf{D}\mathbf{g} = 0$

On appelle connexion de Levi-Civita associée à \mathbf{g} l'unique connexion sans torsion \mathbf{D} vérifiant

$$\mathbf{D}\mathbf{g} = 0$$

Démonstration. Soient $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ trois champs de vecteurs sur \mathcal{M} . Raisonnons par analyse-synthèse en supposant l'existence d'une telle connexion sans torsion vérifiant $\mathbf{D}\mathbf{g} = 0$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) &= \mathbf{D}_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) \\ &= \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) \quad (\text{en utilisant } \mathbf{D}\mathbf{g} = 0) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Donc en additionnant l'expression analogue pour $\mathbf{Y}(\mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}))$ en soustrayant celle pour $\mathbf{Z}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$, et en utilisant le fait que \mathbf{D} soit sans torsion on a

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}) &= \frac{1}{2}(-\mathbf{Z}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})) + \mathbf{X}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) \\ &\quad + \mathbf{g}(\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) + \mathbf{g}(\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]) - \mathbf{g}(\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}])) \end{aligned}$$

Ce qui montre bien l'unicité. Il reste juste à montrer que \mathbf{D} définie par la formule ci-dessus vérifie bien les propriétés de la connexion ce qui est clair. \square

Remarque 6. Ceci permet d'exprimer le Christoffel en fonction des composantes de la métrique et de la métrique inverse.

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\mathbf{g}^{il} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathbf{g}_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathbf{g}_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

Definition 10. on appelle connexion de Levi-Civita associée à \mathbf{g} l'unique connexion sans torsion \mathbf{D} vérifiant

$$\mathbf{D}\mathbf{g} = 0$$

3.7 Transports parallèles et geodésiques

Soit I un intervalle de \mathbb{R} avec $0 \in I$ et γ une courbe :

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs. On décompose \mathbf{X} dans un système de coordonnées :

$$\mathbf{X} = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Et on obtient pour $\mathbf{D}_{\dot{\gamma}(t)}\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\dot{\gamma}(t)}\mathbf{X}_{\gamma(t)} &= \mathbf{D}_{\dot{\gamma}(t)}(X^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + X^\alpha \mathbf{D}_{\dot{\gamma}(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) \\ &= (X^\alpha \circ \gamma)'(t) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + X^\alpha(t) \dot{\gamma}^\beta(t) \Gamma_{\beta\alpha}^\mu(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ceci montre que $D_{\dot{\gamma}(t)}\mathbf{X}$ ne dépend que des valeurs de \mathbf{X} prises sur la courbe γ . En particulier, pour \mathbf{Y} vecteur tangent de $T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$. On peut s'intéresser à l'équation suivante

$$\begin{cases} D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} &= 0 \\ \gamma(0) &= p \\ \dot{\gamma}(0) &= \mathbf{Y} \end{cases}$$

Ce système est équivalent dans un système de coordonnées à :

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^\alpha(t) + \dot{\gamma}^\mu(t)\dot{\gamma}^\beta(t)\Gamma_{\beta\mu}^\alpha(\gamma(t)) &= 0 \\ \gamma(0) &= p \\ \dot{\gamma}(0) &= \mathbf{Y} \end{cases}$$

C'est un système de n équations différentielles ordinaires dans \mathbb{R}^n d'inconnues

$$(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$$

Definition 11. Soient p un point de \mathcal{M} et \mathbf{Y} un vecteur tangent de $T_p\mathcal{M}$. Il existe un intervalle maximal I contenant 0 et une unique courbe $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ telle que γ satisfait le système précédent. On dit alors que γ est une courbe géodésique ;

*Intuitivement nous pourrions dire que en fait le vecteur $\dot{\gamma}$ transporte parallèlement son propre vecteur sur sa courbe, il n'y a pas d'accélération latérale à faire.*³

Exemple 1. sur \mathbb{R}^n muni métrique euclidienne e les géodésiques sont des droites de \mathbb{R}^n

3.8 Tenseur de courbure

Nous comprenons que si nous poussions à l'extrême l'analogie que nous souhaitons établir entre les dérivées usuelles, les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ et les dérivées covariantes, la commutation des champs de vecteurs est assurée par la règle de Schwarz. En revanche elle n'est pas vérifiée de façon générale par les dérivées covariantes

$$i.e D_{\mathbf{X}}D_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} \neq D_{\mathbf{Y}}D_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}$$

Nous introduisons ainsi le **tenseur de courbure** ou tenseur de Riemann qui mesure ce défaut de commutativité.

De plus, nous pouvons donner une idée plus précise de la courbure. En effet, géométriquement, imaginons une sphère en 3D munie d'une \mathbf{g} . Visualisons ses géodésiques. La courbure va se traduire par l'accélération de la "séparation" des géodésiques.

Maintenant imaginons nous dans une variété de dimension 3. Nous visualisons des géodésiques qui peuvent aussi s'entrecroiser comme des brins d'ADN. Ainsi il faut prendre en compte cette espèce de rotation relative entre les géodésiques. Ainsi l'accélération de "séparation" relative entre les géodésiques se manifeste à la fois par une intensité et par une direction. L'ouvrage [8] décrit très bien tout ceci dans les premières pages. Il identifie alors un lien entre les ε , le vecteur séparation entre deux géodésiques, et les coefficients de la courbure de Riemann.

3. ou en donnant une image d'un avion qui veut partir d'un point A de la Terre pour arriver à un point B, il n'y a pas plus d'effort plus conséquent à fournir dans les "autres" directions pour arriver à B

Definition 12. Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une variété munie d'une métrique et \mathbf{D} la connexion de Levi-Civita associée à \mathbf{g}

La fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : \mathcal{T}\mathcal{M}^3 &\longrightarrow \mathcal{T}\mathcal{M} \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &\longmapsto \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \mathbf{D}_{\mathbf{Y}}\mathbf{D}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \mathbf{D}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z} \end{aligned}$$

définit un $(1, 3)$ -tenseur appelé tenseur de Riemann de $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$

Remarque 7. C'est l'ajout du terme $-\mathbf{D}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z}$ qui permet à \mathbf{R} de définir un tenseur c'est à dire d'être C^∞ -multilinéaire

Ses composantes en coordonnées sont définies par la relation

$$\mathbf{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}, \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial x^\delta} = \mathbf{R}^\alpha_{\beta\gamma\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

De plus on peut relier l'expression des composantes $\mathbf{R}^\alpha_{\beta\gamma\mu}$ avec les Christoffels car :

$$\mathbf{R}^\alpha_{\beta\gamma\mu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\gamma\nu}\Gamma^\nu_{\mu\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{\gamma\beta} \quad (3.2)$$

En fait, de manière à bénéficier de propriétés de symétries nous allons modifier le tenseur de courbure \mathbf{R} en le considérant comme un champs de tenseur de type $(0, 4)$ en posant désormais :

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} = \mathbf{g}_{\alpha\nu}\mathbf{R}^\nu_{\beta\gamma\mu}$$

Et vérifient certaines relations de symétries :

Proposition 3.3.

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} = -\mathbf{R}_{\alpha\beta\mu\gamma} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} = -\mathbf{R}_{\beta\alpha\gamma\mu} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} = \mathbf{R}_{\gamma\mu\alpha\beta} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} + \mathbf{R}_{\alpha\mu\beta\gamma} + \mathbf{R}_{\alpha\gamma\mu\beta} = 0 \quad (1re\ identité de\ Bianchi) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{D}_\nu\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} + \mathbf{D}_\beta\mathbf{R}_{\nu\alpha\gamma\mu} + \mathbf{D}_\alpha\mathbf{R}_{\beta\nu\gamma\mu} = 0 \quad (2e\ identité de\ Bianchi) \quad (3.7)$$

Une démonstration de ces identités est détaillée dans [4] (p.38) et plus particulièrement dans [3] une démonstration géométrique de la deuxième identité de Bianchi est explicitée.

Au vu de ces symétries nous pensons alors à contracter les indices pour avoir un objet plus simple à manipuler :

Definition 13. On définit le tenseur de Ricci dans un système de coordonnées par :

$$\mathbf{Ric}_{\beta\mu} = \mathbf{R}^\alpha_{\beta\alpha\mu}$$

Il s'agit d'un $(0, 2)$ -tenseur symétrique.

En contractant le tenseur de Ricci, on obtient un scalaire appelé la courbure scalaire, et donné par

$$\mathbf{Rscal} = \mathbf{g}^{\alpha\beta}\mathbf{Ric}_{\alpha\beta}$$

4 Relativité générale

Nous disposons maintenant de tout le formalisme géométrique nécessaire pour introduire la base de la relativité générale.

Donnons en quelques mots une idée générale des fondements de la relativité générale. La théorie de la relativité générale se fonde sur une approche géométrique de l'Univers. C'est-à-dire que nous ne raisonnons plus en termes de force gravitationnelle mais bien par rapport au relief d'un espace, à savoir la courbure d'une variété de dimension 4, l'espace-temps.

Imaginons un tel espace, si de plus nous ajoutons une source d'énergie par exemple électromagnétique transportée par les ondes, ou de la masse, nous avons l'intuition que ceux-ci modifient l'espace temps.

Il faudra ainsi s'attacher à expliquer comment un espace non vide influe sur la géométrie de l'espace considéré.

De plus, fidèles à notre esprit de physicien, nous savons que les résultats que nous obtenons à un endroit donné dans l'espace sous l'oeil d'un système de coordonnées fixées doivent être aussi vérifiée dans tout autre système de coordonnées.⁴ Pour cela nous nous rendons compte que le formalisme tensoriel répond parfaitement à nos attentes.

Un dernier point à prendre en compte : la conservation de la masse et de l'énergie impose que les tenseurs soient pris de divergence nulle.

4.1 Formulation Lagrangienne

Présentons en quelques lignes comment nous obtenons l'équation d'Einstein.

Nous conseillons au lecteur de lire [5] pour un exposé plus détaillé. Nous réalisons ce passage pour bien faire comprendre tous les aspects de la relativité générale en passant par l'analyse lagrangienne.

Nous situons notre étude dans un espace temps, qui est une variété lorentzienne $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ Pour obtenir cette équation, nous utilisons un principe de moindre action c'est-à-dire qu'une solution d'un système physique minimise un certain Lagrangien noté \mathcal{L} .

Ce Lagrangien est la somme de deux termes :

- l'un noté \mathcal{L}_G ne dépendant que de \mathbf{g} correspond qu'à l'action du champ gravitationnel De plus, nous pouvons réécrire

$$\mathcal{L}_G[\mathbf{g}] = \int_{\mathcal{M}} L_G[\mathbf{g}] d\mu_{\mathbf{g}}$$

⁵

- l'autre \mathcal{L}_M correspond à l'action de la matière présente dans l'espace-temps $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ donc dépend à la fois de \mathbf{g} et du champ de matière noté ψ
Et

$$\mathcal{L}_M[\psi, \mathbf{g}] = \int_{\mathcal{M}} L_M[\psi, \mathbf{g}] d\mu_{\mathbf{g}}$$

4. Le formalisme des tenseurs permet de s'affranchir des coordonnées comme nous l'avons vu dans les parties précédentes. Ainsi en faisant un choix judicieux des coordonnées nous pouvons obtenir des résultats directement.

5. $d\mu_{\mathbf{g}}$ est la mesure invariante associée à \mathbf{g} . Elle vérifie $d\mu_{\mathbf{g}} = \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx$

Il y a donc deux paramètres \mathbf{g} et ψ

Nous sommes donc à la recherche de points critiques de \mathcal{L} ce qui nous mène donc à écrire l'équation d'**Euler-Lagrange** :

$$\begin{aligned}\delta_g \mathcal{L}_G + \delta_g \mathcal{L}_M &= 0 && \text{(variation du paramètre } \mathbf{g}) \\ \delta_\psi \mathcal{L}_M &= 0 && \text{(variation du paramètre } \psi)\end{aligned}$$

C'est la première équation qui donnera lieu à l'équation d'Einstein.

La proposition suivante fait apparaître naturellement le tenseur d'Einstein dans les variations de \mathcal{L}_g

Proposition 4.1. *Soit h un 2-tenseur symétrique sur \mathcal{M} et à support compact. Alors on a*

$$\delta_g \mathcal{L}_G(h) = - \int_{\mathcal{M}} \mathbf{G}_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx$$

avec \mathbf{G} étant le **tenseur d'Einstein** voir la définition ci-dessous.

Théorème-Définition 2. *On définit le tenseur d'Einstein par*

$$G_{\alpha\beta} = \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{Rscal}$$

Celui-ci vérifie notamment

$$\mathbf{div}_g \mathbf{G} = 0$$

En fait, le fait de vouloir une divergence nulle émane directement de la physique. Dans [4] on explique comment construire mécaniquement des tenseurs de divergence nulle en utilisant des vecteurs de Killing.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbf{div}_g G &= \mathbf{g}^{\mu\nu} D_\mu G_{\nu\alpha} && \text{(par définition)} \\ &= \mathbf{g}^{\mu\nu} D_\mu \mathbf{Ric}_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} \partial_\alpha \mathbf{Rscal}\end{aligned}$$

La démonstration servira de première illustration concrète des techniques de calculs que nous employons en relativité et verrons à quel point les notations utilisées sont assez efficaces.

Nous la détaillons ainsi, en rappelant la seconde identité de Bianchi Prop (3.3)

$$\underbrace{\mathbf{D}_\nu \mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu}}_{(1)} + \underbrace{\mathbf{D}_\beta \mathbf{R}_{\nu\alpha\gamma\mu}}_{(2)} + \underbrace{\mathbf{D}_\alpha \mathbf{R}_{\beta\nu\gamma\mu}}_{(3)} = 0 \quad (4.1)$$

Regardons chaque terme un par un en contractant l'identité suivant α et γ

Sachant que

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} = \mathbf{g}_{\alpha\rho} \mathbf{R}^\rho_{\beta\gamma\mu}$$

Alors

$$\mathbf{g}^{\alpha\gamma} \mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\mu} = \underbrace{\mathbf{g}^{\alpha\gamma} \mathbf{g}_{\alpha\rho}}_{(*)} \mathbf{R}^\rho_{\beta\gamma\mu}$$

Dans l'expression de (*), nous fixons l'indice ρ et nous sommes sur α . En utilisant la symétrie de \mathbf{g} nous avons bien : $\mathbf{g}_{\alpha\rho}\mathbf{g}^{\alpha\gamma} = \mathbf{g}_{\rho\alpha}\mathbf{g}^{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\rho$
 Tout compte fait il ne nous reste alors plus que le terme en $\mathbf{R}_{\beta\gamma\mu}^\gamma$ ce qui est exactement $\mathbf{Ric}_{\beta\mu}$!

Nous savons de plus par (Prop 3.3) que :

$$\mathbf{R}_{\nu\alpha\gamma\mu} = \mathbf{R}_{\gamma\mu\nu\alpha}$$

et que

$$\mathbf{R}_{\gamma\mu\nu\alpha} = -\mathbf{R}_{\gamma\mu\alpha\nu}$$

et donc

$$\mathbf{g}^{\alpha\gamma}\mathbf{R}_{\gamma\mu\alpha\nu} = \underbrace{\mathbf{g}^{\alpha\gamma}\mathbf{g}_{\gamma\rho}}_{(*)}\mathbf{R}_{\mu\alpha\nu}^\rho$$

On a sommé suivant γ il ne nous reste plus que le terme en

$$\mathbf{R}_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \mathbf{Ric}_{\mu\nu}$$

Ainsi le terme (2) devient

$$-\mathbf{D}_\beta\mathbf{Ric}_{\mu\nu}$$

De plus dans (3) (4.1), nous savons de Prop 3.3 que

$$\mathbf{R}_{\beta\nu\gamma\mu} = -\mathbf{R}_{\beta\nu\mu\gamma}$$

On passe alors de l'expression de départ Eq.1 à

$$\underbrace{\mathbf{D}_\nu\mathbf{Ric}_{\beta\mu}}_{(1)} - \underbrace{\mathbf{D}_\beta\mathbf{Ric}_{\mu\nu}}_{(2)} - \underbrace{\mathbf{g}^{\alpha\gamma}\mathbf{D}_\alpha\mathbf{R}_{\beta\nu\mu\gamma}}_{(3)} = 0 \quad (4.2)$$

Puis nous contractons l'expression suivant β et μ

(1) s'écrit alors

$$\mathbf{g}^{\beta\mu}\mathbf{D}_\nu\mathbf{Ric}_{\beta\mu} = \mathbf{D}_\nu\underbrace{\mathbf{g}^{\beta\mu}\mathbf{Ric}_{\beta\mu}} = \partial_\nu\mathbf{Rscal}$$

De plus (2) s'écrit alors

$$\mathbf{g}^{\beta\mu}\mathbf{D}_\beta\mathbf{Ric}_{\mu\nu} = \mathbf{div}_\mathbf{g}\mathbf{Ric}_\nu$$

Enfin (3) s'écrit

$$\mathbf{g}^{\beta\mu}\mathbf{g}^{\alpha\gamma}\mathbf{D}_\alpha\mathbf{R}_{\beta\nu\mu\gamma} = \mathbf{g}^{\alpha\gamma}\mathbf{D}_\alpha\underbrace{\mathbf{g}^{\beta\mu}\mathbf{g}_{\beta\rho}\mathbf{R}_{\nu\mu\gamma}^\rho}$$

Donc en sommant d'abord sur μ puis en utilisant la symétrie du **tenseur de Ricci** ceci devient $\mathbf{g}^{\alpha\gamma}\mathbf{D}_\alpha\mathbf{Ric}_{\gamma\nu}$ qui est exactement $\mathbf{div}_\mathbf{g}\mathbf{Ric}_\nu$

D'où

$$\partial_\nu \mathbf{Rscal} - 2\operatorname{div}_g \mathbf{Ric}_\nu = 0$$

ce qui vérifie donc d'après 4.1

$$\operatorname{div}_g \mathbf{G} = 0$$

□

Ce genre de calcul sera par la suite beaucoup plus simplifié en s'affranchissant de certaines étapes de calculs.

Le tenseur énergie-impulsion \mathbf{T} matérialise la matière et l'énergie contenue dans l'espace-temps, cette équation traduit donc l'influence de la matière et de l'énergie sur la courbure de l'espace temps

Exemple 2. *Donnons à titre d'exemple l'expression du tenseur énergie-impulsion relié à un champ électromagnétique.*

Dans l'espace de Minkowski (\mathbb{R}^{1+3}, m) , le champ électromagnétique composé d'un couplage entre le champ électrique E et magnétique B est donné par un $(0,2)$ -tenseur antisymétrique F .

On définit le tenseur énergie-impulsion associé par :

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\gamma} F_{\beta}^{\gamma} - \frac{1}{4} m_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

1. *C'est un 2-tenseur symétrique*
2. *De divergence nulle (ie $D^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$)*
3. *il vérifie $T_{00} = \frac{1}{2} = (|E|^2 + |B|^2)$*

4.2 Equations d'Einstein

Nous voulons maintenant décrire la structure des équations d'Einstein. Ce sont des équations différentielles. Nous voulons donner sous une forme la plus claire possible l'énoncé d'un problème de Cauchy relatif à cette équation.

Nous allons exprimer le problème de Cauchy grâce à un système de coordonnées qui s'apprête bien à cela : les **coordonnées d'ondes** (Def.14).

Les équations d'Einstein de la relativité générale s'énoncent alors ainsi :

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{4.3}$$

En fait cette équation s'écrit dans sa forme générale

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

avec Λ la constante cosmologique mais nous ne nous attarderons pas là-dessus dans ce qui suit. Nous considérerons toujours (4.3)

Remarque 8.

- Résoudre les équations d'Einstein c'est trouver la métrique \mathbf{g} et la variété \mathcal{M} vérifiant ces équations
- Les équations sont tensorielles donc sont invariantes par changement de coordonnées.
- De plus lorsque $T = 0$ (il n'y a ni action du champ, ni d'énergie)
Alors on peut prendre la trace de (4.3) pour obtenir que le tenseur de courbure est nul

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta}\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathbf{g}^{\alpha\beta}\mathbf{g}_{\alpha\beta}\mathbf{Rscal} = \mathbf{Rscal} - 2\mathbf{Rscal} = 0$$

(la variété étant de dimension 4, $\mathbf{g}^{\alpha\beta}\mathbf{g}_{\alpha\beta} = 4$)

Ainsi l'équation dans le vide se réécrit

$$\mathbf{Ric} = 0 \tag{4.4}$$

Nous allons revenir à une équation d'onde sur la métrique \mathbf{g} .

L'opérateur d'onde, ou d'Alembertien associé à \mathbf{g} est noté et s'écrit pour toute fonction scalaire f

$$\square_{\mathbf{g}}f := D^\nu D_\mu f = g^{\mu\nu} f = g^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu f - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha f)$$

De plus nous noterons la partie principale du D'Alembertien

$$\tilde{\square}_{\mathbf{g}}f = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu f$$

Pour faciliter drastiquement les calculs nous allons opérer avec un **système de coordonnées d'ondes**

Definition 14. Un système de coordonnées d'ondes sur $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ est la donnée de 4 fonctions scalaires x^0, \dots, x^3 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathcal{M} vérifiant

$$\square_{\mathbf{g}}x^\alpha = 0 \quad (\text{elles vérifient toutes la même équation d'onde})$$

Lemme 4.2. Dans un système de coordonnées x^α , $\square_{\mathbf{g}}$ est donné par

$$\square_{\mathbf{g}}f = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{g}|}} \partial_\beta \left(\mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \partial_\alpha f \right)$$

Lemme 4.3. Les coefficients $g_{\alpha\beta}$ de la métrique \mathbf{g} dans les coordonnées d'ondes vérifient pour tout α

$$\mathbf{g}^{\beta\mu} \partial_\beta \mathbf{g}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\mu\nu} \partial_\alpha \mathbf{g}_{\mu\nu}$$

Démonstration. On introduit des coordonnées d'ondes $(x^\alpha) \alpha = 0, \dots, 3$
En remplaçant à chaque fois par la coordonnée x^α dans 4.2

Soit $\alpha \in \{0, \dots, 3\}$ ⁶

$$\partial_\beta \left(\mathbf{g}_{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \right) = 0$$

6. au bout d'un moment nous détaillerons pas toutes les étapes de la rédaction qui seront alors explicites pour être plus concis

on a donc

$$\partial_\beta \mathbf{g}_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\beta\alpha} \mathbf{g}^{\mu\nu} \partial_\beta \mathbf{g}_{\mu\nu} = 0 \quad (4.5)$$

or on a

$$\mathbf{g}^{\alpha\nu} \mathbf{g}^{\beta\mu} \partial_\beta \mathbf{g}_{\mu\nu} = -\mathbf{g}^{\alpha\nu} \mathbf{g}^{\beta\mu} \partial_\beta \mathbf{g}_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

Ainsi en remplaçant dans (7.4) nous obtenons

$$\mathbf{g}^{\alpha\nu} \mathbf{g}^{\beta\mu} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\beta\alpha} \mathbf{g}^{\mu\nu} \partial_\beta \mathbf{g}_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

il suffit de multiplier l'équation par $\mathbf{g}_{\gamma\alpha}$ □

Montrons maintenant la proposition suivante

Proposition 4.4. *Dans les coordonnées d'ondes, Le tenseur de Ricci s'écrit*

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \tilde{\square}_{\mathbf{g}} \mathbf{g}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\mu \mathbf{g}_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\gamma \mathbf{g}_{\mu\beta} + Q_{\alpha\beta}(\partial g, \partial g)$$

où Q est une forme quadratique en les coefficients de \mathbf{g}

Démonstration. Après quelques calculs nous obtenons

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \mathbf{g}^{\gamma\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\gamma\mu} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{\gamma\alpha}}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{\gamma\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) + Q_{\alpha\beta}(\partial g, \partial g)$$

Or d'après le lemme (4.3), en utilisant les indices adaptés et en utilisant la symétrie de \mathbf{g} , nous avons d'abord en fixant l'indice α

$$\mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\mu \mathbf{g}_{\gamma\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\alpha \mathbf{g}_{\mu\gamma} \quad (4.8)$$

$$\partial_\beta \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\mu \mathbf{g}_{\gamma\alpha} + \underbrace{\mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\beta \partial_\mu \mathbf{g}_{\gamma\alpha}}_{(1)} = \frac{1}{2} \partial_\beta \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\alpha \mathbf{g}_{\mu\gamma} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\alpha \partial_\beta \mathbf{g}_{\mu\gamma} \quad (\text{dérivant suivant } \beta)$$

De façon analogue sur l'indice β remplaçant α et après avoir dérivé par α nous avons

$$\partial_\alpha \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\gamma \mathbf{g}_{\mu\beta} + \underbrace{\mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\alpha \partial_\gamma \mathbf{g}_{\mu\beta}}_{(2)} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\beta \mathbf{g}_{\mu\gamma} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\beta \partial_\alpha \mathbf{g}_{\mu\gamma} \quad (4.9)$$

(1) et (2) sont les deux premiers termes entre parenthèse de l'expression du Ricci ci-dessus. Ainsi en additionnant ces deux termes, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\beta \partial_\mu \mathbf{g}_{\gamma\alpha} + \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\alpha \partial_\gamma \mathbf{g}_{\mu\beta} - \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\beta \partial_\alpha \mathbf{g}_{\mu\gamma} &= \frac{1}{2} \partial_\beta \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\alpha \mathbf{g}_{\mu\gamma} + \frac{1}{2} \partial_\alpha \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\beta \mathbf{g}_{\mu\gamma} \\ &\quad - \partial_\beta \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\mu \mathbf{g}_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\gamma \mathbf{g}_{\mu\beta} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \mathbf{g}^{\gamma\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} - \partial_\beta \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\mu \mathbf{g}_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha \mathbf{g}^{\gamma\mu} \partial_\gamma \mathbf{g}_{\mu\beta} + Q_{\alpha\beta}(\partial g, \partial g) \quad (4.10)$$

Donc hormis le premier terme qui est exactement $\tilde{\square}_{\mathbf{g}} g$ nous avons réussi à supprimer toutes les dérivées secondes pour n'avoir que des dérivées premières multipliées par des coefficients dérivés de la métrique inverse et une forme quadratique en les coefficients de \mathbf{g} pris en ∂g . □

Nous allons poursuivre cette étude pour montrer la proposition qui suit le lemme (4.5).

Lemme 4.5. *Soit (x^α) un système de coordonnées d'onde. Alors pour tout α*

$$\mathbf{g}^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0 \quad (4.11)$$

Démonstration. On remplace dans 4.2

$$\square_{\mathbf{g}}x^\alpha = \mathbf{g}^{\mu\nu} \left(\underbrace{\partial_\mu \partial_\nu x^\alpha}_{=0} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha x^\alpha \right)$$

on a alors le résultat par la définition de (x^α) □

La proposition suivante nous éclairera directement sur l'utilisation du D'Alembertien

Proposition 4.6. *Dans les coordonnées d'ondes, Le tenseur de Ricci s'écrit*

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\tilde{\square}_{\mathbf{g}}\mathbf{g}_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}(\partial g, \partial g)$$

où Q est une forme quadratique en les coefficients de \mathbf{g}

Nous exposons une preuve de ceci

Démonstration. Nous savons de (3.2) que la forme du tenseur de Ricci est de façon générale

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta}{\partial x^\beta} + \Gamma^2$$

En se rappelant de l'expression des Christoffels Le terme en Γ^2 désigne les produits de Christoffels, qui résultent en une somme de produit de coefficient de la métrique \mathbf{g} et de leurs dérivées premières, et un produit de dérivée première de coefficients de la métrique. Donc il s'agit bien de quelque chose de quadratique.

Définissons $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \mathbf{g}_{\gamma\beta} + \partial_\gamma \mathbf{g}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \mathbf{g}_{\alpha\gamma})$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \mathbf{g}^{\mu\gamma}\Gamma_{\alpha\gamma\beta}$$

Avec ces notations,

$$\partial_\gamma \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma = \partial_\gamma (\mathbf{g}^{\gamma\rho}) \Gamma_{\beta\rho\alpha} + \mathbf{g}^{\gamma\rho} \partial_\gamma \Gamma_{\beta\rho\alpha} \quad (4.12)$$

$$\partial_\beta \Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma = \partial_\beta (\mathbf{g}^{\gamma\rho}) \Gamma_{\gamma\rho\alpha} + \mathbf{g}^{\gamma\rho} \partial_\beta \Gamma_{\gamma\rho\alpha} \quad (4.13)$$

De façon à calculer $\mathbf{Ric}_{\alpha\beta}$ il nous faut calculer le terme

$$\mathbf{g}^{\gamma\rho} \partial_\gamma \Gamma_{\beta\rho\alpha} - \mathbf{g}^{\gamma\rho} \partial_\beta \Gamma_{\gamma\rho\alpha}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
2\partial_\gamma\Gamma_{\beta\rho\alpha} &= \partial_\gamma\partial_\beta\mathbf{g}_{\alpha\rho} + \partial_\gamma\partial_\alpha\mathbf{g}_{\beta\rho} - \partial_\gamma\partial_\rho\mathbf{g}_{\beta\alpha} \\
2\partial_\beta\Gamma_{\gamma\rho\alpha} &= \partial_\beta\partial_\gamma\mathbf{g}_{\alpha\rho} + \partial_\beta\partial_\alpha\mathbf{g}_{\gamma\rho} - \partial_\beta\partial_\rho\mathbf{g}_{\gamma\alpha}
\end{aligned}$$

Tel qu'en simplifiant les premiers termes

$$2\mathbf{g}^{\gamma\rho}(\partial_\gamma\Gamma_{\beta\rho\alpha} - \partial_\beta\Gamma_{\gamma\rho\alpha}) = -\underbrace{\mathbf{g}^{\gamma\rho}\partial_\gamma\partial_\rho\mathbf{g}_{\alpha\beta}}_{(1)} + \underbrace{\mathbf{g}^{\gamma\rho}(\partial_\gamma\partial_\alpha\mathbf{g}_{\beta\rho} - \partial_\beta\partial_\alpha\mathbf{g}_{\gamma\rho} + \partial_\beta\partial_\rho\mathbf{g}_{\gamma\alpha})}_{(2)} \quad (4.14)$$

Nous allons réécrire (2) de façon à faire apparaître les conditions du lemme (4.5). Pour cela, il nous faut exploiter la symétrie de γ et ρ dans l'expression de (2). (2) peut en effet se réécrire

$$\mathbf{g}^{\rho\gamma}(\partial_\rho\partial_\alpha\mathbf{g}_{\beta\gamma} - \partial_\beta\partial_\alpha\mathbf{g}_{\rho\gamma} + \partial_\beta\partial_\gamma\mathbf{g}_{\rho\alpha})$$

Ainsi, ¹

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^{\gamma\rho}(\partial_\gamma\partial_\alpha\mathbf{g}_{\beta\rho} - \partial_\beta\partial_\alpha\mathbf{g}_{\gamma\rho} + \partial_\beta\partial_\rho\mathbf{g}_{\gamma\alpha}) &= \frac{1}{2}\mathbf{g}^{\gamma\rho}(\partial_\gamma\partial_\alpha\mathbf{g}_{\beta\rho} - \partial_\beta\partial_\alpha\mathbf{g}_{\gamma\rho} + \partial_\beta\partial_\rho\mathbf{g}_{\gamma\alpha} \\
&\quad + \partial_\rho\partial_\alpha\mathbf{g}_{\beta\gamma} - \partial_\beta\partial_\alpha\mathbf{g}_{\rho\gamma} + \partial_\beta\partial_\gamma\mathbf{g}_{\rho\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{g}^{\gamma\rho}(\partial_\gamma\partial_\alpha\mathbf{g}_{\beta\rho} - \partial_\beta\partial_\alpha\mathbf{g}_{\gamma\rho} + \partial_\rho\partial_\alpha\mathbf{g}_{\beta\gamma} \\
&\quad + \partial_\beta\partial_\rho\mathbf{g}_{\gamma\alpha} - \partial_\beta\partial_\alpha\mathbf{g}_{\rho\gamma} + \partial_\beta\partial_\gamma\mathbf{g}_{\rho\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{g}^{\gamma\rho}(\partial_\alpha\Gamma_{\gamma\beta\rho} - \partial_\beta\Gamma_{\rho\alpha\gamma}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\alpha(\underbrace{\mathbf{g}^{\gamma\rho}\Gamma_{\gamma\beta\rho}}_{=0^2}) + \frac{1}{2}(\partial_\beta(\underbrace{\mathbf{g}^{\gamma\rho}\Gamma_{\rho\alpha\gamma}}_{=0})) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\partial_\alpha(\mathbf{g}^{\gamma\rho})\Gamma_{\gamma\beta\rho} + \frac{1}{2}(\partial_\beta(\mathbf{g}^{\gamma\rho})\Gamma_{\rho\alpha\gamma}))
\end{aligned}$$

Le dernier terme est alors un produit entre dérivées partielles premières des coefficients de la métrique. Et le premier terme dans (4.14) est exactement $-\tilde{\square}_{\mathbf{g}}\mathbf{g}_{\alpha\beta}$

Ainsi en se rappelant des Γ^2 dans l'expression du $\mathbf{Ric}_{\alpha\beta}$ nous avons démontré que

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\tilde{\square}_{\mathbf{g}}\mathbf{g}_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}(\partial g, \partial g)$$

Avec Q une forme quadratique en les coefficients de \mathbf{g} □

1. dans le calcul on regroupe les termes admettant une dérivée partielle respectivement en α puis en β

2. par les conditions des coordonnées d'ondes

4.3 Le problème de Cauchy en relativité générale

Maintenant que le cadre est fixé, touchons un mot sur le problème de Cauchy en relativité générale.

Dans ce rapport, nous nous attacherons beaucoup plus à décrire une synthèse du problème de Cauchy pour les équations d'Einstein.

Nous invitons le lecteur désireux à comprendre les détails des preuves mathématiques à lire [5] et [4].

De façon analogue aux problèmes généraux de résolution d'équation différentielle, nous allons considérer les données initiales sur un espace. Cet espace sera l'ensemble de pris avec un temps fixé. Par exemple, $\{t = 0\}$ correspond à un tel espace.

Une hypersurface $\Sigma \subset \mathcal{M}$ est dite de type espace si $g(X, X) > 0$ pour tout X . C'est sur une hypersurface de type espace que nous allons définir les données de Cauchy pour l'équation d'Einstein.

On peut associer à Σ sa normale unitaire, c'est-à-dire l'unique champs de vecteur T de type temps vérifiant $g(T, T) = -1$ et $g(T, X) = 0$ pour tout X . L'objet suivant est fondamental.

Definition 15. Soit $\Sigma \subset \mathcal{M}$ une hypersurface de type espace et T la normale unitaire à Σ . On définit un 2-tenseur sur Σ par $K(X, Y) = -g(D_X T, Y)$, que l'on appelle la seconde forme fondamentale de Σ .

On peut restreindre la métrique g à Σ car $T_p \Sigma$ est un sous-espace vectoriel de $T_p \mathcal{M}$ pour tout $p \in \Sigma$.

De plus de façon analogue au cas lorentzien, cette restriction mène à définir sur Σ une métrique riemannienne \bar{g} . Donc on peut y définir de même une dérivée covariante \bar{D} et un tenseur de courbure \bar{R} .

Definition 16. On nomme les équations de contraintes ¹

$$\bar{R} + (tr_{\bar{g}} K)^2 - |K|_{\bar{g}}^2 = 0 \quad (4.15)$$

$$-\bar{D}^l K_{il} + \bar{D}_i tr_{\bar{g}} K = 0 \quad (4.16)$$

On appellera alors le triplet (Σ, \bar{g}, K) des données de Cauchy du problème.

Le théorème suivant démontré par Choquet-Bruhat pour la partie existence et par Choquet-Bruhat Geroch pour la partie unicité s'énonce ainsi

Théorème 4.7. Soit (Σ, \bar{g}, K) des données de Cauchy qu'on dira être suffisamment lisses. Il existe une unique solution $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ des équations d'Einstein qui soit globalement hyperbolique et maximale telle que

1. $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ soit une variété lorentzienne de tenseur de Ricci identiquement nulle
2. $\Sigma \subset \mathcal{M}$ soit de type espace
3. \bar{g} soit la restriction de \mathbf{g} à Σ
4. K soit la seconde forme fondamentale de Σ

Un schéma de la preuve en [4] et dans la thèse de mon directeur de stage montre comment notamment l'utilisation des équations d'Einstein écrites sous la forme (4.6) permet d'obtenir une équation à dérivées partielles sur \mathbf{g} qui se résout par un schéma itératif fondé sur des estimations d'énergie pour $\tilde{\square}_{\mathbf{g}}$. Par exemple pour $\Sigma = \mathbb{R}^3$, ceci donnera une solution \mathbf{g} sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ pour un certain $T > 0$.

5 Linéarisation des équations d'Einstein

Nous tentons de décrire les solutions aux équations d'Einstein. D'un point de vue physique nous serions intéressés d'obtenir des solutions approximatives qui se "rapprochent" des solutions exactes. Nous voulons trouver une famille de solution approximatives. Une stratégie que nous pouvons penser mettre en place est de linéariser les équations d'Einstein. Donc de considérer la métrique comme une somme d'une métrique "propre à l'espace-temps" que l'on nommera le **background** et d'une perturbation.

Il se trouve qu'à cette issue la linéarisation donnera des résultats probants d'un point de vue mathématique et physique. Nous pouvons matérialiser par notre pensée le fait que l'espace temps n'est pas statique c'est-à-dire que la métrique s'accompagne de perturbation qui peuvent être toujours en fluctuations et se propager. Nous mentionnerons l'exemple des [ondes gravitationnelles](#). Cependant comme nous le mentionnerons l'approche s'avérera bien incomplète dans de nombreux cas.

Ce qui fera l'objet de la partie qui suivra : une méthode permettant de trouver une certaine famille de solutions "exactes" modulo des conditions.

Nous réalisons notre étude de linéarisation des équations d'Einstein autour de la métrique de Minkowski m (voir Remarque 2 p. 6).

Soit $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ une solution des équations d'Einstein telle que :

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$$

avec h une métrique associée et vérifiant de plus h petit devant m . Ici m est le background (BG) et h est la perturbation.

Proposition 5.1.

1. le linéarisé du tenseur de Ricci est donné par

$$\delta \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \partial_\mu h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial^\mu (\partial_\alpha h_{\beta\mu} + \partial_\beta h_{\alpha\mu}) - \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta h$$

où on a posé $h = m^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$

2. Posons

$$\overline{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h m_{\alpha\beta}$$

1. Nous ne faisons pas une analyse détaillée de l'origine de ces équations mais l'on explique très bien l'origine équations de contraintes dans [5] [4] et la thèse de mon directeur de stage qui paraîtra prochainement

3. Soit ε un champ de vecteur, le linéarisé du tenseur de Ricci est invariant par la transformation

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \longrightarrow \bar{h}_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \varepsilon_\beta + \partial_\beta \varepsilon_\alpha$$

Cette transformation sera nommée transformation de la jauge de Lorentz ⁷
Elle préservera l'invariance par rapport au tenseur d'Einstein

4. On peut alors exprimer le linéarisé du tenseur d'Einstein pour obtenir $\delta G_{\beta\nu} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\beta\nu}$

À l'issue de cette proposition nous donnerons la forme des équations d'Einstein linéarisées.

Remarque 9. La notation δ signifie que l'on regarde le "linéarisé" c'est-à-dire l'expression développée à l'ordre $\{0 + 1\}$ par rapport à la perturbation h

Démonstration. Rappelons encore une fois l'expression du tenseur de Ricci

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \partial_\beta \Gamma_{\gamma\alpha}^\gamma + \Gamma^2$$

Nous laissons de côté le terme quadratique puisqu'en développant les termes contiendront plus d'un terme h en facteur.

Nous voulons l'expression linéarisée à l'ordre 1 en h du tenseur de Ricci pour la métrique \mathbf{g} que nous étudions.

Nous donnons d'abord l'expression linéarisée du tenseur de courbure.

Par souci de clarté, nous présentons le détail des calculs à la page suivante.

7. pour plus de détail sur les jauges voir [5] [4]

$$\delta \mathbf{R}_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu} \delta \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}$$

L'expression développée des Christoffels nous mène à écrire en tenant compte des termes d'ordre 1 seulement

$$\delta \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} m^{\alpha\sigma} (\partial_{\nu} h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta} h_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma} h_{\beta\nu})$$

et aussi

$$\delta \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} m^{\alpha\sigma} (\partial_{\nu} h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta} h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} h_{\beta\mu})$$

Donc

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{\beta\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} m^{\alpha\sigma} (\partial_{\mu} (\partial_{\nu} h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta} h_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma} h_{\beta\nu}) \\ &\quad - (\partial_{\nu} h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta} h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} h_{\beta\mu})) \end{aligned}$$

en simplifiant certains termes

$$\delta \mathbf{R}_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} m^{\alpha\sigma} (\partial_{\mu} \partial_{\beta} h_{\nu\sigma} - \partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\beta\nu} - \partial_{\nu} \partial_{\beta} h_{\mu\sigma} + \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\beta\mu})$$

La variation du tenseur de Ricci est donc

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{Ric}_{\beta\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_{\beta} (m^{\sigma\alpha} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma}) - m^{\sigma\alpha} \partial_{\sigma} \partial_{\alpha} h_{\beta\nu} \\ &\quad - \partial_{\beta} \partial_{\nu} (m^{\sigma\alpha} h_{\alpha\sigma}) + \partial_{\nu} (m^{\sigma\alpha} \partial_{\sigma} h_{\beta\alpha})) \end{aligned}$$

on note la trace de h ⁸

$$h = m^{\sigma\alpha} h_{\alpha\sigma}$$

et l'opérateur d'onde

$$m^{\sigma\alpha} \partial_{\sigma} \partial_{\alpha}$$

l'expression devient alors

$$\begin{aligned} 2\delta \mathbf{Ric}_{\beta\nu} &= \partial_{\beta} (m^{\sigma\alpha} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma}) + \partial_{\nu} (m^{\sigma\alpha} \partial_{\sigma} h_{\beta\alpha}) - \partial_{\beta} \partial_{\nu} h - \square h_{\beta\nu} \\ &= \partial_{\beta} \left(m^{\sigma\alpha} \partial_{\alpha} h_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} \partial_{\nu} h \right) + \partial_{\nu} \left(m^{\sigma\alpha} \partial_{\sigma} h_{\beta\alpha} - \frac{1}{2} \partial_{\beta} h \right) - \square h_{\beta\nu} \end{aligned}$$

On pose alors

$$\bar{h}_\nu^\alpha = h_\nu^\alpha - \frac{1}{2}h\delta_\nu^\alpha$$

et donc

$$\partial_\alpha \bar{h}_\nu^\alpha = \left(h_\nu^\alpha - \frac{1}{2}h\delta_\nu^\alpha \right) = m^{\sigma\alpha} \partial_\alpha h_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} \partial_\nu h$$

De même

$$\partial_\alpha \bar{h}_\beta^\alpha = \partial_\alpha \left(m^{\sigma\alpha} \partial_\alpha h_{\beta\sigma} - \frac{1}{2} \partial_\beta h \right)$$

Alors la variation du tenseur

$$2\delta\mathbf{Ric}_{\beta\nu} = \partial_\beta \partial_\alpha \bar{h}_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha \bar{h}_\beta^\alpha - \square h_{\beta\nu}$$

avec les conditions de jauge

$$\partial_\alpha \bar{h}_\nu^\alpha = 0$$

alors

$$\delta\mathbf{Ric}_{\beta\nu} = \frac{1}{2} \square h_{\beta\nu}$$

Sachant que le tenseur d'Einstein est juste la trace réciproque du tenseur de Ricci

$$G_{\beta\nu} = \bar{R}_{\beta\nu}$$

Alors on a

$$\delta G_{\beta\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\beta\nu}$$

Les équations d'Einstein linéarisées à l'ordre 1 s'écrivent donc

$$\square \bar{h}_{\beta\nu} = -2T_{\beta\nu} \quad (5.1)$$

avec la jauge de Lorentz donnée par

$$\partial_\nu \bar{h}^{\beta\nu} = 0 \quad (5.2)$$

En écrivant de façon développée on lit

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{h}_{\beta\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{h}_{\beta\nu} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{h}_{\beta\nu} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{h}_{\beta\nu} = -2T_{\beta\nu}$$

Donc on voit très explicitement que c'est bien une équation d'onde sur toutes les composantes.

□

5.1 Ondes gravitationnelles

Au niveau "physique", h pourrait représenter la perturbation que provoque le passage d'une particule par exemple, mais le résultat important c'est la mise en valeur d'ondes gravitationnelles.

Nous restons dans le cas du vide soit $T = 0$ Dans les conditions de la jauge de Lorentz (5.1) les équations 4.3 se réécrivent

$$\square \bar{h}_{\beta\nu} = 0$$

Dans le cadre de \mathcal{M} pris en dimension $(1 + 3)$, nous avons donc 10 équations indépendantes. De plus, comme nous utilisons la métrique de minkowski représentant un espace temps "plat", nous pouvons considérer des ondes planes qui s'y propagent.

Ainsi nous pouvons chercher des solutions de (5.1) sous la forme

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re\{A_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha}\} = \Re\{A_{\mu\nu}e^{ik_i x^i} e^{i\omega t}\}^9$$

Donc on pose $A_{\mu\nu}$ des scalaires, ce seront les 10 inconnues de notre système de 10 équations¹⁰. Chaque A représente une polarisation possible de l'onde gravitationnelle.

Les trois composantes k_α associées aux composantes espaces forment le vecteur d'onde de l'onde gravitationnelle et on a posé $\omega = -k_0$.

Précisons que le D'Alembertien agit sur l'une des exponentielles complexes utilisées donne

$$\square e^{i\cdot} = \partial_\alpha \partial^\alpha e^{i\cdot} = (ik_\alpha)(ik^\alpha) = -k_\alpha k^\alpha$$

Donc on a une solution si le vecteur \mathbf{k} est isotrope (i.e $k_\alpha k^\alpha = 0$) ou bien encore qu'il vérifie

$$\omega = \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$$

Cette relation de dispersion impose qu'à la fois la vitesse de groupe égale la vitesse de phase égale la vitesse de la lumière.

De plus, on pourrait alors penser qu'il y a 10 polarisations possibles de l'onde puisqu'il y a 10 équations à 10 inconnues.

En fait les conditions de jauge de Lorentz $\partial_\nu \bar{h}_{\beta\nu} = 0$ imposent

$$A^{\beta\nu} k_\nu = 0 \tag{5.3}$$

ce qui ajoute donc 4 conditions puisque 4 équations indépendantes.

Ainsi, nous passons de 10 degrés de liberté à 6 degrés de liberté.

De plus il y a une condition cachée dans la jauge de Lorentz, celle-ci va restreindre des degrés de liberté aux $A_{\mu\nu}$. En effet, en introduisant la transformation de jauge ε donnée par

$$\varepsilon^\mu = \Re\{iB^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}\}$$

Elle vérifie bien la condition de jauge puisque $\square \varepsilon = 0$

La perturbation de la métrique se retrouve transformée par

9. on sépare les composantes espaces de celle de temps

10. h étant symétrique et on suppose les k_α connus

$$\bar{h}_{\mu\nu} \mapsto \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu + m_{\mu\nu} \partial_\alpha \varepsilon^\alpha$$

et donc l'amplitude

$$A_{\mu\nu} \mapsto A_{\mu\nu} + k_\mu B_\nu + k_\nu B_\mu - m_{\mu\nu} k_\alpha B^\alpha$$

On peut alors choisir les 4 composantes B . comme nous le souhaitons.

Nous utilisons alors les conditions de la jauge TT ¹¹

c'est-à-dire qu'il est particulièrement judicieux de représenter spécifiquement la transformation qui s'opère sur les quantités suivantes

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} A_\alpha^\alpha \\ A_{01} \\ A_{02} \\ A_{03} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} A_\alpha^\alpha \\ A_{01} \\ A_{02} \\ A_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ k_1 & -\omega & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & -\omega & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

et comme la matrice 4x4 est inversible, on peut alors choisir comme nous souhaitons les A_α^α et A_{0i}

On choisit alors la condition TT.

1. $A_\alpha^\alpha = 0$ (onde sans trace, *traceless*)
2. $A_{0i} = 0$ (onde spatiale)

Tout ceci nous donne au total 8 conditions sur les $A_{\mu\nu}$ ce qui implique qu'il reste 2 degrés de liberté, **2 mode de polarisations possibles** de l'onde gravitationnelle.

De plus, les conditions TT s'avèrent fixées c'est-à-dire qu'une transformation de jauge ne les éliminent pas.

Sachant de plus (Eq. 5.3) on a

$$A_{ij} k^j = 0 \text{ (onde transverse)}$$

Ces calculs étant faits et les techniques générales de calcul étant illustrées ci-dessus

Si l'on considère une onde se déplaçant juste dans la direction z ($k_x = k_y = 0$ et $k_z \neq 0$), les conditions de la **jauge TT** imposent que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La métrique associée à ce type d'onde gravitationnelle s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + \Re(A_+ e^{ik_\alpha x^\alpha})](dx)^2 + 2\Re(A_\times e^{ik_\alpha x^\alpha}) dx dy + [1 - \Re(A_+ e^{ik_\alpha x^\alpha})](dy)^2 + (dz)^2$$

Prenons deux particules à des positions fixées dans l'espace.

Lors du passage de l'onde,

1. dans la direction x les particules se voient se rapprocher puis s'éloigner
2. dans la direction y il se passe la même chose de façon déphasée de π par rapport à précédemment
3. il n'y a rien qui change dans la direction z

11. Le lecteur désireux de voir plus d'illustration des applications de la linéarisation des équations d'Einstein peut consulter [8] (p.935) où des exemples multiples sont introduits ainsi qu'une méthode pour calculer la jauge TT.

5.2 Les limites du linéaires

Les conditions de jauge de Lorentz (5.2) et l'équation (5.1) donnent

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square\partial_\nu\bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

Toujours dans le cadre de la théorie linéaire, ceci est une équation de conservation. Le tenseur énergie-impulsion est donc conservé localement ou plutôt en première approximation.

Or si nous mettons une masse dans le champ gravitationnel de la Terre, nous verrions que sa quantité de mouvement P est conservée.

En effet cette dernière s'exprime ¹²

$$P^i = \int_V T^{0i} d^3x$$

Or la dérivée de ceci donne

$$\dot{P}^i = \int_V \partial_0 T^{0i} d^3x = - \int_V \partial_j T^{ji} d^3x = - \oint_\Sigma T^{ji} n_j d^2x = 0 \text{ }^{13}$$

Parce qu'à l'extérieur de la masse, c'est le vide donc le tenseur T est nul donc aussi au bord.

Ainsi la quantité de mouvement de la masse est constante ce qui est paradoxal. ¹⁴

Cette apparente contradiction est levée lorsque nous revenons aux équations d'Einstein non linéarisées.

Nous avons choisi de détailler cet exemple pour illustrer le fait que nous ne pouvons pas nous affranchir de l'aspect non-linéaire des équations d'Einstein. Il y a pleins d'autres exemples.

De même nous voudrions bien définir l'énergie de l'onde gravitationnelle. Mais à travers quelle métrique pouvons nous la définir sachant que la métrique d'arrière-plan (le Background) joue aussi un rôle dynamique ? Car si nous définissons une énergie de l'onde gravitationnelle donnée par la perturbation h nous voudrions le faire par rapport à une métrique fixée. De plus cette énergie peut elle-même avoir un effet sur background.

Dans [8] ceci est détaillé et nous y lisons que l'énergie est quadratique en les coefficients de h .

Enfin un aspect plus évident est qu'un grand nombre de phénomènes physiques induisent des perturbations h qui sont loins d'être négligeables. Donc l'approximation linéaire serait complètement inappropriée pour les décrire.

12. avec V le volume de la masse, Σ sa surface ou son bord

13. la dernière égalité s'obtient par le théorème de Green

14. nous avons cas prendre l'exemple d'une chute libre

6 Recherche de solutions radiatives dans les équations d'Einstein

Dans [1], Yvonne Choquet-Bruhat considère une famille de métriques lorentziennes de la forme

$$g(x, \omega\phi) = g_0(x, \omega\phi) + \frac{1}{\omega}g^{(1)}(x, \omega\phi) + \frac{1}{\omega^2}g^{(2)}(x, \omega\phi) \quad (6.1)$$

où

1. g_0 est une métrique que pour l'instant nous est inconnues
2. $\omega > 0$ joue le rôle d'une pulsation élevée
3. ϕ est une fonction scalaire jouant le rôle d'une phase
4. les perturbations $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ sont des fonctions de la variables x et de $\varepsilon = \omega\phi$

L'objectif de Choquet-Bruhat est de trouver les conditions à avoir pour que la métrique g soit une solution approchée des équations d'Einstein (*i.e*) qu'elle vérifie

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = O(\omega^{-1}) \quad (6.2)$$

Nous rappelons que l'expression du tenseur de Ricci contient au plus des dérivées secondes de la métrique. Donc le tenseur contient probablement des termes d'ordre ω ou ω^0 . Ces termes là doivent être annulés pour obtenir (6.2).

6.1 Développement asymptotique du tenseur de Ricci

D'abord, il nous faut trouver un développement approché de la métrique inverse de g . On écrit alors

$$g^{\lambda\mu} = \overset{(0)}{g}{}^{\lambda\mu}(x) + \frac{(1)}{\omega}g^{\lambda\mu}(x, \omega\phi) + \frac{1}{\omega^2}g^{\lambda\mu}(x, \omega\phi) + \dots \quad (6.3)$$

Sachant que par définition

$$g^{\lambda\mu}g_{\lambda\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu}$$

donc en calculant et regroupant par ordre

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{(0)}{g}_{\lambda\alpha} &= \delta_{\alpha}^{\mu} \text{ (il s'agit de la matrice inverse de } \overset{(0)}{g}_{\lambda\mu}) \\ \overset{(1)}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{(0)}{g}_{\lambda\alpha} + \overset{(0)}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{(1)}{g}_{\lambda\alpha} &= 0, \text{ c'est-à-dire } \overset{(1)}{g}{}^{\lambda\alpha} = -\overset{(0)}{g}{}^{\lambda\alpha}\overset{(0)}{g}{}^{\mu\beta}\overset{(1)}{g}_{\alpha\beta} \\ &\dots \\ \overset{(p)}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{(0)}{g}_{\lambda\alpha} + \overset{(q-1)}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{(1)}{g}_{\lambda\alpha} + \overset{(p-2)}{g}{}^{\lambda\mu}\overset{(2)}{g}_{\lambda\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi par récurrence nous déterminons tous les termes $\overset{(p)}{g}{}^{\lambda\mu}$ en fonction de $\overset{(q)}{g}_{\lambda\mu}$ avec $q = 0, 1, 2$.

Nous dérivons maintenant (6.1) pour obtenir

$$\bar{\partial}_\alpha g_{\lambda\mu} = \partial_\alpha g_{\lambda\mu}^{(0)} + g'_{\lambda\alpha} n_\alpha + \frac{1}{\omega} \partial_\alpha g_{\lambda\mu}^{(1)} + \frac{1}{\omega} g'_{\lambda\mu} n_\alpha + \frac{1}{\omega^2} \partial_\alpha g_{\lambda\mu}^{(2)} \quad (6.4)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\alpha g_{\lambda\mu} &= \frac{\partial g_{\lambda\mu}(x, \omega\phi(x))}{\partial x^\alpha} \\ n_\alpha &= \partial_\alpha \phi \\ g'_{\lambda\mu} &= \left\{ \frac{\partial g_{\lambda\mu}(x, \varepsilon)}{\partial x^\alpha} \right\}_{\varepsilon=\omega\phi} \end{aligned}$$

et la dérivée partielle suivant x

$$\partial_\alpha g_{\lambda\mu} = \left\{ \frac{\partial g_{\lambda\mu}(x, \varepsilon)}{\partial x^\alpha} \right\}_{\varepsilon=\omega\phi}$$

Ainsi de (6.3) et (6.4) nous déduisons le développement des Christoffels

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda(0)} + \frac{1}{\omega} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda(1)} + \frac{1}{\omega^2} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda(2)} + \dots \quad (6.5)$$

Avec

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda(0)} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda + \frac{1}{2} g^{(0)\lambda\mu} \left(g'_{\beta\mu} n_\alpha + g'_{\alpha\mu} n_\beta - g'_{\alpha\beta} n_\mu \right)$$

et que $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda$ désigne les symboles de Christoffel de la métrique de base $g^{(0)}$

Du développement (6.6) nous déduisons bien le développement du tenseur de Ricci

$$\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} = \omega R_{\alpha\beta}^{(-1)} + R_{\alpha\beta}^{(0)} + \frac{1}{\omega} R_{\alpha\beta}^{(1)} + \dots \quad (6.6)$$

Nous dirons que la métrique g sera une onde approchée d'ordre

- zéro si $R_{\alpha\beta}^{(-1)} = 0$ (et $R_{\alpha\beta}$ borné)
- 1 si $R_{\alpha\beta}^{(-1)} = 0$ et $R_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$ (et $\omega R_{\alpha\beta}$ borné)

Il se trouve d'une part les équations $R_{\alpha\beta}^{(-1)} = 0$ pour l'ordre 0 et de l'autre le système des équations $R_{\alpha\beta}^{(-1)} = 0$ et $R_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$ pour l'ordre 1 sont invariantes par changement de coordonnées. Nous ne détaillerons la preuve de ce résultat qui se trouve dans [1]. Par la suite, nous l'utiliserons pour se placer dans des systèmes de coordonnées judicieux pour trouver des relations tensorielles par la suite (qui seront indépendantes du système de coordonnées).

15. par soucis de clarté nous noterons avec R ce qui est relatif au tenseur de Ricci

6.2 Coordonnées radiatives

Les coordonnées radiatives sont des coordonnées telles que x^0 soit définie par :

$$x^0 = \phi(x). \text{ donc } n_0 = 1, \text{ et } n_i = 0 \quad (6.7)$$

Ce qui est un choix toujours localement possible.

6.3 Résolution pour les ondes approchées d'ordre zéro

Nous ne traiterons pas en entier la résolution pour l'ordre 0. On pourra consulter directement [1]. En regroupant les éléments d'ordre 0 dans (6.6) nous identifions que

$${}^{(-1)}R_{\alpha\beta} = \Gamma'^{\lambda}_{\alpha\beta} n_\lambda - \Gamma'^{\lambda}_{\beta\lambda} n_\alpha$$

D'où l'équation approchée d'ordre zéro

$${}^{(-1)}R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{(0)\lambda\mu} \left\{ \left(g''_{\alpha\mu} n_\beta + g''_{\beta\mu} n_\alpha \right) n_\lambda - g''_{\lambda\mu} n_\alpha n_\beta - g''_{\alpha\beta} n_\mu n_\lambda \right\} = 0 \quad (6.8)$$

où on a posé

$$g''_{\lambda\mu} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} g_{\lambda\mu} \right\}_{\varepsilon=\omega\phi}$$

Dans [1], on montre que (6.8) est vérifiée équivaut aux conditions de la surface d'onde. Nous présentons la condition de la surface d'onde. On dit que pour que ϕ soit surface d'onde de la métrique base alors

$$g^{(0)\lambda\mu} n_\lambda n_\mu = 0 \quad (6.9)$$

Dans le cadre des coordonnées radiatives ceci se traduit par

$$g^{(0)00} = 0 \quad (6.10)$$

Ainsi, nous déduisons que la partie du terme oscillatoire $g^{(1)}_{\alpha\beta}$ est

$$g^{(1)}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Ainsi que les équations (6.8) s'écrivent

$${}^{(-1)}R_{ij} = 0 \quad (6.11)$$

$${}^{(-1)}R_{0i} = \frac{1}{2} n^j g''_{ij} = 0 \quad (6.12)$$

$${}^{(-1)}R_{00} = -\frac{1}{2} g^{(0)ij} g''_{ij} = 0 \quad (6.13)$$

On a posé $n^\lambda = g^{(0)\lambda\mu} n_\mu$ soit

$$n^0 = 0 \quad n^j = g^{(0)0j} \quad (6.14)$$

Les quatre équations (6.11) sont en coordonnées radiatives les 4 **conditions nécessaires et suffisantes** pour que l'on ait une onde approchée d'ordre zéro. Ces dernières conditions impliquent

$$\frac{1}{2}n^j g_{ij}^{(1)} = 0 \quad (6.15)$$

$$-\frac{1}{2}n^j g^{(0)ij} g_{ij}^{(1)} = 0 \quad (6.16)$$

6.4 Résolution pour les ondes approchées d'ordre 1

Dans un premier temps, nous avons la démarche de trouver des conditions nécessaires pour qu'il y ait des solutions d'ordre 1.

Après les calculs réalisés lors du développement asymptotique nous pouvons donner l'expression du terme d'ordre (0) du tenseur de Ricci

$${}^{(0)}R_{\alpha\beta} = \Gamma'^{\lambda}_{\alpha\beta} n_\lambda - \Gamma'^{\lambda}_{\beta\lambda} n_\alpha + \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\beta\lambda} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\lambda\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\mu} \Gamma^\lambda_{\beta\mu} \quad (6.17)$$

Si $n^\lambda n_\lambda = 0$

$${}^{(0)}R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{(0)\lambda\mu} \left\{ g''_{\alpha\mu} n_\lambda n_\beta + g''_{\beta\mu} n_\alpha n_\lambda - g''_{\lambda\mu} n_\alpha n_\beta \right\} + \mathcal{H}_{\alpha\beta} = 0 \quad (6.18)$$

où $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ est la somme de termes suivants

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta} = \text{I}_{\alpha\beta} + \text{II}_{\alpha\beta} + \text{III}_{\alpha\beta} + \text{IV}_{\alpha\beta} + \text{V}_{\alpha\beta}$$

Où

1. $\text{I}_{\alpha\beta}$ correspond à la somme des termes en $g''_{\lambda\mu}^{(1)}$
2. $\text{II}_{\alpha\beta}$ correspond à la somme des termes en $\partial_\nu g'_{\mu\lambda}^{(1)}$
3. $\text{III}_{\alpha\beta}$ correspond à la somme des termes en $g'_{\mu\lambda}^{(1)}$
4. $\text{IV}_{\alpha\beta}$ correspond aussi la somme des termes en $\partial_\nu g'_{\mu\lambda}^{(1)}$ mais qu'on décide de catégoriser à part suivant les coefficients utilisés
5. $\text{V}_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta}$ (tenseur de Ricci de la métrique de base)¹⁷

Les termes des expressions développées des $\text{I}_{\alpha\beta}, \dots, \text{IV}_{\alpha\beta}$ comportent toujours un terme n_λ des coordonnées radiatives. Donc il y a beaucoup de simplification qui vont s'opérer si l'on voulait les calculer. Ce que nous ferons.

Les équations de (6.18) sont 10 équations linéaires en les $g''_{\lambda\mu}^{(2)}$ non homogènes. Les parties homogènes (terme entre parenthèse) sont non indépendantes. Donc dans les coordonnées

17. Donc on retombe sur nos appuis puisque maintenant l'objectif est d'établir un lien plus direct avec la métrique de base pour en sortir des conditions

radiatives¹⁸ les partis homogènes en $g''_{\lambda\mu}$ ⁽²⁾ sont identiquement nulles pour $\alpha, \beta = i, j$ ¹⁹ et arbitraires si α ou $\beta = 0$.

Il ne reste plus qu'une condition nécessaire pour que les parties indépendantes de $g''_{\lambda\mu}$ ⁽²⁾ soit nulles

$$\mathcal{H}_{ij} = 0 \text{ (pour } i, j = 1, 2, 3)$$

ce qui fait 6 équations indépendantes.

Comme nous le **disions**, nous constatons qu'en coordonnées radiatives, R_{ij} ⁽⁰⁾ se réduit à, en développant en simplifiant les termes de \mathcal{H}_{ij}

$$\begin{aligned} R_{ij}^{(0)} &= -n^h \partial_h g'_{ij} + \frac{1}{2} n^h (\partial_i g'_{hj} + \partial_j g'_{hi}) - \frac{1}{2} g'^{00} g'_{ij} \\ &+ \frac{1}{4} n^h n^k g'_{jh} g'_{ik} - \frac{1}{2} g'_{ij} \bar{\nabla}_\lambda n^\lambda - n^h \bar{\Gamma}_{ij}^k g'_{hk} + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{ij}^0 g'^{lm} g'_{lm} \\ &- \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{i0}^0 n^h g'_{jh} - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{il}^0 g'^{lm} g'_{jm} + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{il}^r g'^{l0} g'_{rj} + \bar{R}_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Nous sommes très redevables aux coordonnées radiatives puisque notre expression ne contient que des g'_{ij} ⁽¹⁾ et ses dérivées par rapport aux x^α . Les autres termes $g'_{\alpha 0}$ ⁽¹⁾ ou encore g''_{ij} ⁽¹⁾ n'y figurent pas!!!

Nous avons bien 6 d'équations différentielles aux inconnues g'_{ij} ⁽¹⁾

En plus les relations²¹ (6.15), (6.16), conditions nécessaires, permettent de réécrire les équations en début de cette page sous une forme extrêmement plus simple

$$R_{ij}^{(0)} = -n^h \tilde{\nabla}_h g'_{ij} - \frac{1}{2} g'_{ij} \bar{\nabla}_\lambda n^\lambda + \bar{R}_{ij} = 0 \quad (6.19)$$

où on a posé

$$\tilde{\nabla}_h g'_{ij} = \partial_h g'_{ij} - \bar{\Gamma}_{hi}^r g'_{rl} - \bar{\Gamma}_{hi}^l g'_{il}$$

Remarque 10. On rappelle que dans les coordonnées radiatives $\bar{\Gamma}_{il}^0 = \bar{\nabla}_l n_i$
Donc $\tilde{\nabla}_h$ est calculé de façon formel avec les Christoffels $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ à l'exclusion de ceux présentant un indice zéro.²²

Remarque 11. Les équation (6.19) sont des équations différentielles dites de transport, la "direction" du transport étant prise dans la direction du vecteur n^h vecteur tangent au rayon sur la surface d'onde $\phi = 0$!

Nous avons donc montré que les équations (6.15), (6.16) et (6.19) sont des conditions nécessaires que doivent vérifier les g'_{il} ⁽¹⁾ pour avoir une onde approchée d'ordre 1.

18. Rappel $n_\alpha = \delta_\alpha^0$

19. on rappelle qu'ici les indices alphabétiques sont réservés pour les entiers naturels strictement positifs

21. Nous pouvons admirer un moment à quel point c'est cousu de fil blanc!

22. il y a toujours ceux-là qui sont arbitraires

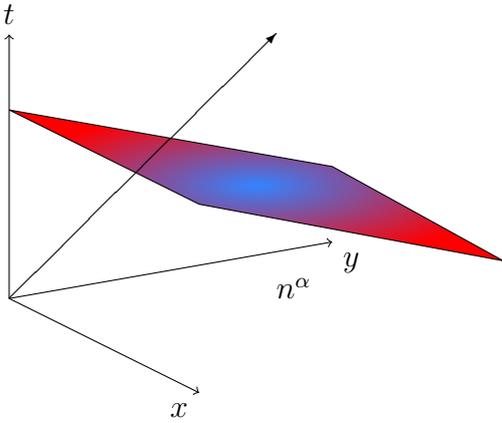
Maintenant nous allons montrer un résultat permettant de montrer partiellement la suffisance de ces conditions.

Théorème 6.1. *La vérification des équations (6.19) dans l'espace-temps et des équations (6.15), (6.16) sur une hypersurface initiale transverse aux rayons (trajectoires du champ de vecteur n^α) entraîne la vérification de ces dernières équations dans l'espace-temps si le tenseur de Ricci de la métrique de base vérifie les conditions*

$$n^j \bar{R}_{ij} = 0 \quad (6.20)$$

$$g^{(0)ij} \bar{R}_{ij} = 0 \quad (6.21)$$

En bref, imaginons-nous dans un repère orthogonal 3D comme en (6.4).



Nous imaginons que chaque plan comme celui en rouge est isomorphe à \mathbb{R}^3 . En particulier celui dessiné est orienté par le champ de vecteur n^α) Ce que nous dit la proposition précédente c'est qu'il suffit de vérifier les équations (6.19) et (6.15), (6.16) sur un plan (sur une hypersurface) ceci suit une évolution : il suffit que ça soit vérifié dans ce plan là sous (6.20) et alors les équations seront vérifiées dans l'espace temps.

On peut le voir comme si le plan évoluait dans l'espace-temps et le comportement de ce qui s'y passe est conditionné par ce qui s'y passé dans le plan initial.

Démonstration. On déduit de (6.19)

$$-n^h n^j \tilde{\nabla}_h g'_{ij} - \frac{1}{2} g'_{ij} \tilde{\nabla}_\lambda n^\lambda + \bar{R}_{ij} = 0 \quad (\text{on a multiplié par } n^j \text{ et utilisé 6.20})$$

ce qui s'écrit

$$-n^h n^j \tilde{\nabla}_h g'_{ij} - \frac{1}{2} g'_{ij} \tilde{\nabla}_\lambda n^\lambda + \bar{R}_{ij} = 0 \quad (\text{et ce parce que } n^j \tilde{\nabla}_h = \bar{\nabla}_h \text{ puisque } n^0 = 0) \quad (6.22)$$

$$g^{(0)ij} \bar{R}_{ij} = n^h \partial_h \left(g^{(0)ij} g'^{(1)'}_{ij} \right) + 2n^h \Gamma_{h0}^i n^j g'^{(1)'}_{ij} - \frac{1}{2} g^{(0)ij} g'^{(1)'}_{ij} \bar{\nabla}_\lambda n^\lambda = 0 \quad (6.23)$$

□

Les équations (6.22) et (6.23) sont quatre équations différentielles ordinaires pour les quatre quantités $n^j g_{ij}^{(1)}$ et $g^{ij} g_{ij}^{(0)}$ d'où le résultat annoncé.

Une analyse sur l'intégration des équations de propagation réalisée dans [1] permet d'achever la suffisance des conditions. Il s'agit de la technique dite **d'intégration des équations de propagation**.

On synthétise alors tout ceci dans l'énoncé du théorème ci-après.

D'où le théorème

Théorème 6.2. *Pour qu'en coordonnées radiatives, les équations $\bar{R}_{\alpha\beta}^{-1} = 0$ et $\bar{R}_{ij}^0 = 0$ soient vérifiées avec des $g_{ij}^1(x, \varepsilon)$ bornés pour tout ε ($g_{\alpha 0}^{(1)}$ sont arbitraires) il est nécessaire et suffisant que*

1. la métrique de base vérifie les conditions

$$\bar{R}_{ij} = 0$$

2. les $g_{ij}^{(1)}$ vérifient les équations différentielles (6.19) de propagation le long des rayons,
3. les $g_{ij}^{(1)}$ vérifient les quatre conditions initiales (6.20) sur une variété initiale transverse aux rayons, et sont réguliers (de classe C^2) sur cette variété.

Les $g_{ij}^{(1)}$ dépendent donc de 2 fonctions arbitraires sur cette variété initiale ²³

6.5 Perte d'énergie radiative

Il nous reste les équations $R_{0\alpha}^{(0)} = 0$.

Nous utilisons les éléments qui sont arbitrairement pris (à savoir ceux avec les indices zéro)

Si les $g_{ij}^{(1)}$ satisfont aux hypothèses du théorème précédent il est toujours possible de déterminer les $g_{ij}^{(2)}$ de façon à vérifier $R_{0\alpha}^{(0)} = 0$ avec un choix arbitraire des $g_{0\alpha}^{(1)}$.

Cependant il n'est pas toujours possible de déterminer les $g_{ij}^{(2)}$ bornés pour tout ε , alors que nous voulons une onde approchée.

En fait, si les conditions (6.20) sont vérifiées, les équations $R_{0\alpha}^{(0)} = 0$ s'écrivent

$$R_{0i}^{(0)} = \frac{1}{2}n^j g_{ij}^{(2)} - \frac{1}{2}n^j \left(\tilde{\nabla}_j g_{0i}^{(1)} + \tilde{\nabla}_i g_{0j}^{(1)} \right) + \frac{1}{2}g^{hj} \tilde{\nabla}_h g_{ij}^{(1)} + \bar{R}_{0i} = 0$$

Ce qui est intéressant ici c'est que $R_{0i}^{(0)}$ est constant et que \bar{R}_{0i} ne dépend pas de ε . Et pour qu'il existe des fonctions $g_{0i}^{(1)}$ et $g_{ij}^{(2)}$ bornées pour tout ε satisfaisant l'équation précédente les $g_{ij}^{(1)}$ étant connus, bornés il faut et il suffit que

$$\bar{R}_{0i} = 0$$

En coordonnées quelconques ces conditions s'écrivent alors

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = \tau n_\alpha n_\beta$$

23. On retrouve 2 modes indépendants de l'onde gravitationnelle

il faut enfin considérer la dernière équation qui nous reste $\overset{(0)}{R}_{00} = 0$.

Après une étude de cette équation, nous trouvons une condition nécessaire et suffisante sur le caractère borné des $\overset{(1)}{g}_{0i}$ et $\overset{(2)}{g}_{ij}$ et de leur dérivées. Elles sont bornées si et seulement si $\bar{R}_{00} > 0$.

Donc nous pouvons présenter une **condition nécessaire** ne dépendant **que** de la métrique de base pour que les équations d'Einstein admettent une onde approchée d'ordre 1.

Il faut que

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = \tau n_\alpha n_\beta \text{ avec } \tau > 0 \quad (6.24)$$

Donc il s'agit d'un critère ne dépendant que de la métrique de base (le background) pour savoir si l'onde peut être une onde approchée oscillatoire d'ordre 1.

Remarque 12. *La condition $\tau > 0$ s'interprète comme la perte d'énergie par radiation gravitationnelle due à la partie oscillatoire de la métrique. La métrique background g_0 ne doit pas être vue comme une métrique d'arrière-plan car elle décrit la perte par radiation de l'énergie contenue dans l'onde. Elle permet de percevoir l'énergie de l'onde ce qui répond partiellement à l'interrogation de la section (5.2)*

6.6 Résolution approximatives à l'ordre 1 des équations d'Einstein-Maxwell

Nous mentionnons que dans [2] Choquet-Bruhat applique la même méthode que pour la résolution approximatives à l'ordre 1 des équation d'Einstein-Maxwell

$$G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$$

Avec $T_{\alpha\beta}$ le **tenseur énergie-impulsion électromagnétique** associé au champ électromagnétique E .

Elle le considère comme la somme $E_{\alpha\beta}(x, \omega\phi) = G_{\alpha\beta}(x) + H(x, \omega\phi)$ avec G une partie qui oscille lentement et H la composante qui oscille très rapidement.

Elle note $\bar{T}_{\alpha\beta}$ le tenseur énergie-impulsion associé à $H(x, \omega\phi)$

On dira donc que les équations d'Einstein-Maxwell sont satisfaites à l'ordre 1 en ω lorsqu'il existe une constante M indépendantes de ω telle que

$$\text{Sup}|\mathbf{Ric}_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}| \leq M\omega^{-1} \text{ pour tout } \omega \quad (6.25)$$

$$\text{Sup}|\nabla_\alpha E^{\alpha\beta}| \leq M\omega^{-1} \text{ condition de divergence} \quad (6.26)$$

$$\text{Sup}|\oint \nabla_\alpha E_{\beta\gamma}| \leq M\omega^{-1}. \text{ pour tout } \omega \quad (6.27)$$

Nous obtenons avec la même méthode que dans la partie précédente²⁴ une condition

24. les termes changent forcément mais les idées restent les mêmes

nécessaire sur la métrique de base et la partie rapidement oscillante du tenseur énergie-impulsion pour qu'il y ait bien existence de solution d'ordre 1 ²⁵

Pour qu'il y ait ce genre de solution le background doit vérifier

$$\bar{R}_{\alpha\beta} - \bar{T}_{\alpha\beta} = \tau \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \tag{6.28}$$

avec. $\tau > 0$

7 Synthèse

Nous avons donc exhiber une méthode de résolution d'équation aux dérivées partielles décrite par Choquet Bruhat dans [1] pour trouver des solutions approchées aux équations d'Einstein. Cette méthode offre des perspectives plus larges par exemple en résolvant de façon approchée les équations d'Einstein-Maxwell ce qui est réalisé dans le second article de Choquet Bruhat [2]. Cette méthode concentre toutes les spécificités et techniques élémentaires associées à la relativité générale . D'autres méthodes dites de moyennisation peuvent a priori être développées ce qui constitue un pas de plus dans le domaine très large des équations aux dérivées partielles en relativité générale.

Nous pouvons aussi nous poser la question de la convergence des métriques. Savoir même si une convergence ne serait-ce faible dans un certain sens permettrait de faire converger un résultat. Par exemple si une famille de métrique (g_λ) vérifiant $G_\lambda = 0$, converge dans un certain sens vers une métrique g est ce que le tenseur d'Einstein G associé à g vérifie $G = 0$. Ceci concerne le début de la conjecture de Burnett qui a été résolue par mon directeur de stage dans sa thèse. ²⁶

25. avec toujours la métrique solution développée sous la forme asymptotique dont le 1re terme est le background

26. en attendant la publication de sa thèse nous pouvons citer deux de ses articles [6] [7]

8 Appendices

Expression de la métrique \mathbf{g} dans les coordonnées locales :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita associée à \mathbf{g} :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{il} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathbf{g}_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathbf{g}_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

Equation des géodésiques dans un système de coordonnées :

$$\ddot{\gamma}^\alpha(t) + \dot{\gamma}^\mu(t) \dot{\gamma}^\beta(t) \Gamma_{\beta\mu}^\alpha = 0$$

Le tenseur de courbure \mathbf{R} est défini pour tous champs de vecteurs $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \mathbf{D}_\mathbf{X} \mathbf{D}_\mathbf{Y} \mathbf{Z} - \mathbf{D}_\mathbf{Y} \mathbf{D}_\mathbf{X} \mathbf{Z} - \mathbf{D}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z}$$

Et dans un système de coordonnées, on a :

$$\mathbf{R} \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \mathbf{R}_{\beta\gamma\mu}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

où $\mathbf{R}_{\beta\gamma\mu}^\alpha$ est donné par :

$$\mathbf{R}_{\beta\gamma\mu}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\gamma\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\gamma\beta}^\nu$$

Le tenseur de Ricci est défini par :

$$\mathbf{Ric}_{\beta\mu} = \mathbf{R}_{\beta\alpha\mu}^\alpha$$

Dans un système de coordonnées, on a :

$$\mathbf{Ric}_{\beta\mu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\nu$$

Courbure scalaire

$$\mathbf{Rscal} = \mathbf{g}^{\alpha\beta} \mathbf{Ric}_{\alpha\beta}$$

Tenseur d'Einstein

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{Rscal}$$

G Equations d'Einstein

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \mathbf{T}_{\mu\nu}$$

Le D'Alembertien est défini par :

$$\square f = \mathbf{D}^\alpha \mathbf{D}_\alpha f$$

Dans un système de coordonnées d'ondes, on a pour une fonction scalaire f

$$\square f = \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{g}|}} \partial_\beta (\mathbf{g}^{\beta\alpha} \sqrt{|\det \mathbf{g}|} \partial_\alpha f)$$

Références

- [1] Y. Choquet-Bruhat. Construction de solutions radiatives approchées des equations d'Einstein. volume 12, pages 16–35, March 1969.
- [2] Y. Choquet-Bruhat. Approximate radiative solutions of einstein-maxwell equations. In Charles Goethe Kuper and Asher Peres, editors, *Relativity and Gravitation*, pages 1–81. New York : Gordon and Breach Science Publishers, 1971.
- [3] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, and D.I. Kaiser. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- [4] Jacques Smulevici. Halo. In *Cours de l'Ecole Polytechnique*, 2007.
- [5] Jérémie Szeftel. Introduction à la relativité générale. In *Cours de l'Ecole Polytechnique*, 2007.
- [6] Arthur Touati. Global existence of high-frequency solutions to a semi-linear wave equation with a null structure, 2021.
- [7] Arthur Touati. High-frequency solutions to the einstein vacuum equations : local existence in generalised wave gauge, 2022.
- [8] Loring W.Tu. Differential geometry. In *Springer*, 2010.
- [9] Y.Choquet-Bruhat. Introduction to general relativity black holes and cosmology. In *Oxford University Press*, 2009.