Théorème de Bernstein.

2013 – 2014

Référence : Claude Zuily, Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2006, p.518.

Théorème.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On pose

$$\omega(h) := \sup\{|f(u) - f(v)|, |u - v| \leq h\}$$

son module de continuité.
On considère

$$B_n(f,x) = B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Bernstein de f.
Alors

(i) (B_n) *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$.

(ii) $\|f - B_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *où* C *est une constante.*

(iii) L'estimation (ii) *est optimale : il existe* f *lipschitzienne telle que* $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ *pour une constante* $\delta > 0$.

Démonstration. (i) Soit $x \in [0,1]$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli i.i.d de paramètre x. On note $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.
On a alors

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(x) \text{ et } \mathbb{E}(f(x)) = f(x)$$

par théorème de transfert, d'où

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right). \end{aligned}$$

f est continue sur $[0,1]$ compact donc uniformément continue par le théorème de Heine, donc $\omega(\delta)$ est défini pour tout $\delta > 0$ et $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. Par ailleurs, $|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)| \leq 2\|f\|_\infty$ donc, pour $\delta > 0$,

$$\mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \omega(\delta)\mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \leq \delta\right) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| > \delta\right).$$

Par l'inégalité de Tchebychev, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| > \delta\right) &\leq \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\delta^2} \\
&= \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\delta^2} \\
&= \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \\
&\leq \frac{1}{4n\delta^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2},$$

d'où

$$\limsup_{n \to +\infty} \|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta).$$

Le résultat vient de $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$.

(ii) Affinons le résultat de convergence uniforme prouvé ci-dessus. On a d'abord

$$\mathbb{E}\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \mathbb{E}\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right).$$

Montrons que $\omega(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(h)$:
ω est croissante et $\omega(h+k) \leq \omega(h)+\omega(k)$ donc, par récurrence, $\omega(nh) \leq n\omega(h)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}, \omega(\lambda h) \leq \omega(\lceil \lambda \rceil h) \leq \lceil \lambda \rceil \omega(h) \leq (\lambda + 1)\omega(h)$.
On en déduit

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right) \\
&= \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_1\right) \\
&\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2\right)
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder. Or

$$\begin{aligned}
\left\| x - \frac{S_n}{n} \right\|_2^2 &= \mathbb{E}\left(\left| x - \frac{S_n}{n} \right|^2 \right) \\
&= \operatorname{Var}\left(x - \frac{S_n}{n} \right) + \left(\mathbb{E}\left(x - \frac{S_n}{n} \right) \right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2} nx(1-x) + \left(x - \frac{1}{n} nx \right)^2 \\
&= \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(1 + \sqrt{n} \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \right) \\
&\leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).
\end{aligned}$$

D'où $\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

(iii) On pose $f : x \mapsto \left| x - \frac{1}{2} \right|$, on a $\omega(h) \leq h$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\|f - B_n\|_\infty &\geq \left| f\left(\frac{1}{2} \right) - B_n\left(\frac{1}{2} \right) \right| \\
&= \left| B_n\left(\frac{1}{2} \right) \right| \\
&= \mathbb{E}\left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \\
&= \frac{1}{2n} \mathbb{E}|2S_n - n|.
\end{aligned}$$

D'où $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n}\mathbb{E}|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n|$ avec $\varepsilon_j := 2X_j - 1$ variables de Rademacher i.i.d. D'où

$$\begin{aligned}
\|f - B_n\|_\infty &\geq \frac{1}{2n} \|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n\|_1 \\
&\geq \frac{1}{2n\sqrt{e}} \|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n\|_2
\end{aligned}$$

par inégalité de Khintchine.
Or $\|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n\|_2^2 = \operatorname{Var}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) + (\mathbb{E}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n))^2 = n$. D'où

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2\sqrt{ne}} \geq \frac{1}{2\sqrt{e}} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

$\square$

Détails supplémentaires

Proposition (Inégalité de Khintchine)**.**
*Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des variables de Rademacher (*i.e.* valant ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$) i.i.d. Soit $f \in vect_{\mathbb{R}}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.*
Alors $\|f\|_2 \leq \sqrt{e}\mathbb{E}(|f|)$.

Démonstration. On a $f = \sum_j a_j \varepsilon_j$ et on peut supposer $\|f\|_2^2 = 1 = \sum_j a_j^2$. Posons $g := \prod_{j=1}^n (1 + i a_j \varepsilon_j)$. Alors pour presque tout x,

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= \prod_{j=1}^n \sqrt{1 + a_j^2 \varepsilon_j^2(x)} \\
&= \prod_{j=1}^n \sqrt{1 + a_j^2} \\
&\leq \prod_{j=1}^n \sqrt{\exp(a_j^2)} \\
&= \sqrt{\exp\left(\sum a_j^2\right)} \\
&= \sqrt{e}.
\end{aligned}$$

D'où $\|g\|_\infty \leq \sqrt{e}$.
De plus, si $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varepsilon_j g) &= \mathbb{E}\left(\varepsilon_j (1 + i a_j \varepsilon_j) \prod_{k \neq j} (1 + i a_k \varepsilon_k)\right) \\
&= \mathbb{E}(\varepsilon_j (1 + i a_j \varepsilon_j)) \mathbb{E}\left(\prod_{k \neq j} (1 + i a_k \varepsilon_k)\right) \quad \text{par indépendance des } \varepsilon_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varepsilon_j g) &= \mathbb{E}(\varepsilon_j (1 + i a_j \varepsilon_j)) \prod_{k \neq j} \mathbb{E}(1 + i a_k \varepsilon_k) \\
&= i a_j \text{ car } \mathbb{E}(\varepsilon_j) = 0.
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(fg) = \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{E}(\varepsilon_j g)$, d'où $|\mathbb{E}(fg)| = \left| i \sum_{j=1}^n a_j^2 \right| = 1$.
Or

$$\|f\|_1 \geq \frac{|\mathbb{E}(fg)|}{\|g\|_\infty} \geq \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$\square$