Théorème de Banach-Steinhaus et applications

Références :

- Gourdon analyse

Développement : On notera $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ munit de la mesure $\lambda_{\mathbb{T}}$ (mesure quotient de la mesure de Lebesgue normalisée sur $[0, 2\pi]$) et on confondra abusivement les fonctions (continues) 2π-périodiques et les fonctions (continues) sur $\mathbb{T}$.

Contexte : On va démontrer le théorème de Banach-Steinhaus en admettant le lemme de Baire, puis, dans une seconde partie appliquer le résultat à la divergence de la série de Fourier.

On rappelle le lemme de Baire :

Lemme 1

Soit (X, d, τ) un espace métrique complet. Alors il est de Baire, *c'est-à-dire :*

$$\forall (\Omega_n)_n \in \tau^{\mathbb{N}},\ \big(\forall n \in N,\ \overline{\Omega_n} = X\big) \Longrightarrow \left(\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n} = X\right)$$

Théorème 1 (Banach-Steinhaus)

Soit E un espace de Banach et F un evn. Soit $A \subset \mathcal{L}_c(E, F)$. Si

$$\forall x \in E, \qquad \sup_{T\in A} \|Tx\| < \infty$$

Alors

$$\sup_{T\in A} \|T\| < \infty$$

Démonstration : Soit $\Omega_n = \{x \in E \mid \exists T \in A,\ \|Tx\| > n\} = \cup_{T\in A} \{x \in E \mid \|Tx\| > n\}$ est un ouvert de E et de plus, par hypothèse :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \{x \in E \mid \forall n,\ \exists T\ , \|Tx\| > n\} = \left\{x \in E \,\middle|\, \sup_{T\in A} \|Tx\| = \infty\right\} = \emptyset$$

Ainsi par contraposée du lemme de Baire dans E complet, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que Ω_n ne soit pas dense dans E. Considérons un tel N, et soit $x \in E$, $r > 0$ tel que $B_E(x, r) \cap \Omega_n = \emptyset$.

Soit $y \in S_E(0, 1)$, posons $y' = x + ry$. Alors $y' \in B_E(x, r)$ donc $y' \notin \Omega_N$ et par définition de Ω_N : $\forall T \in A$, $\|Ty'\| \leq N$.

$$\|rTy\| - \|Tx\| \leq \|T(x + ry)\| \leq N$$

Et donc $\|Ty\| \leq \frac{N+\|Tx\|}{r} \leq \frac{2N}{r}$. Ceci étant vrai quelque soit $y \in E$ avec $\|y\| = 1$ et quelque soit $T \in A$, on a donc :

$$\forall T \in A, \|T\| \leq \frac{2N}{r}$$

d'où le résultat.

Application à la divergence des séries de Fourier. Posons $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$, $D_n : x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

Notons alors

$$\ell_n : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & (D_n * f)(0) \end{array} \right) \qquad \ell_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}}(t)$$

C'est une application linéaire. De plus comme $\mathbb{T}$ est un compact, $(\mathcal{C}, \| \cdot \|_\infty)$ est un espace de Banach (sous-espace fermé des applications bornées de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$ munit de la norme uniforme).

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, ℓ_n est continue. En effet :

$$|\ell_n(f)| \leq \left| \int_{\mathbb{T}} D_n(-t) f(t) \, \mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}} \right| \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{T}} |D_n(t)| \, \mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}} \leq \|D_n\|_1 \|f\|_\infty$$

(D_n est continue sur $\mathbb{T}$ donc bornée et donc L^1 car $\mathbb{T}$ est de mesure finie)

On a donc $\| \ell_n \| \leq \|D_n\|_1$, on va montrer qu'on a égalité.

Lemme 2 (*Calcul de D_n*)

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Preuve du lemme :

$$\begin{aligned} D_n(t) &= e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} \\ &= e^{-int} \frac{1 - e^{2int} e^{it}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{e^{-int} e^{-i\frac{1}{2}t} - e^{int} e^{i\frac{1}{2}t}}{e^{-i\frac{1}{2}t} - e^{i\frac{1}{2}t}} \\ &= \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \end{aligned}$$

Posons alors $f_p = \dfrac{D_n}{|D_n| + \frac{1}{p}}$, on a de manière évidente les résultats suivants :

- $f_p \in \mathcal{C}$
- $\|f_p\|_\infty \leq 1$
- En fait $|f_p| \leq 1$

$$\ell_n(f_p) = \int_{\mathbb{T}} \frac{D_n(t) D_n(-t)}{|D_n(t)| + \frac{1}{p}} \, \mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}} = \int_{\mathbb{T}} \frac{|D_n(t)|^2}{|D_n(t)| + \frac{1}{p}} \, \mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}}$$

D'après la remarque ci-dessus, la fonction sous l'intégrale est dominée par $|D_n|$, et donc par théorème de convergence dominée, on peut passer à la limite :

$$\ell_n(f_p) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \|D_n\|_1$$

Et donc $\| \ell_n \| = \|D_n\|_1$

Lemme 3 ($\|D_n\|_1$)

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{2}{\pi^2} H_{2n+1} \sim \frac{2}{\pi^2} \ln(n)$$

Preuve du lemme

$$\int_{\mathbb{T}} |D_n(t)| \,\mathrm{d}\lambda_{\mathbb{T}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{|\sin(\frac{1}{2}\,t)|} \,\mathrm{d}t$$

Or $|\sin(x)| \leq |x|$ et donc :

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{|t|} \,\mathrm{d}t$$

Posons le changement de variable $u = \frac{(n+\frac{1}{2})t}{\pi}$, on obtient :

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{2n+1} \frac{|\sin(\pi u)|}{|u|} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{|\sin(\pi u)|}{|u|} \,\mathrm{d}u$$

Et sur l'intervalle $[k, k+1[$, on a $|u| \leq k+1$ et $|\sin(\pi u)| = (-1)^k \sin(\pi u)$ d'où la minoration :

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \int_k^{k+1} \sin(\pi u) \,\mathrm{d}u$$

On peut alors calculer l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \sin(\pi u) \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi} \left[-\cos(\pi u)\right]_k^{k+1} = \frac{2}{\pi}(-1)^k$$

Finalement, en regroupant :

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi^2} H_{2n+1}$$

D'où le lemme

Conclusion. En regroupant les différents résultats, on en déduit que $(\|\!| \ell_n |\!\|)_n$ n'est pas bornée, et donc par contraposée du théorème de BANACH-STEINHAUS, il existe $f \in \mathcal{C}$ tel que $(|\ell_n(f)|)_n$ ne soit pas bornée. C'est bien dire que la série de Fourier de f en 0 diverge.

Résultat plus fort. On peut montrer un résultat plus général quand au "nombre" de fonction de $\mathcal{C}$ dont la série de Fourier diverge.

Définition 1 (*Partie Grasse*)

On dit qu'une partie A d'un espace topologique X est grasse *si c'est une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

Théorème 2 (Banach-Steinhaus *fort*)

Soit E un espace de Banach et F un evn. Soit $A \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Si

$$\sup_{T\in A} \|T\| = \infty$$

Alors

$$\left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{T\in A} \|Tx\| = \infty \right\} \quad \textit{est une partie grasse de } E.$$

Alors

Démonstration :

$$\left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{T\in A} \|Tx\| = \infty \right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{T\in A} \{x \in E \mid \|Tx\| > n\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$$

Or en reprenant la démonstration du premier théorème, si il existe un Ω_n qui ne soit pas dense alors on peut majorer uniformément la norme subordonnée des éléments de A. Comme par hypothèse cela est impossible, tous les Ω_n sont des ouverts denses, et donc l'ensemble considéré est une intersection dénombrable d'ouverts denses, i.e. une partie grasse.

Application. L'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques dont la série de Fourier diverge en 0 (ou de manière équivalente en tout point préalablement fixé de $\mathbb{R}$) est une partie grasse de $\mathcal{C}$.

Recasements : (according to Marnat)

- 208 - Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples.
- 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.