Algèbres cellulaires - Séminaire M2 Recherche

Antoine Dequay - Encadré par Salim Rostam

31 décembre 2021

Le but de ce séminaire est de démontrer le théorème 2.3, qui donne un lien entre les algèbres cellulaires et la classification des A-modules irréductibles. Dans un second temps, on s'attardera sur un exemple particulier d'algèbre cellulaire : l'algèbre d'Iwahori-Hecke du groupe symétrique. La trame de ce rapport est inspirée de [Mat99], et la notion d'algèbre cellulaire a été introduite dans [GL96].

Table des matières

1 Algèbres cellulaires

Notation. Soit R un anneau intègre, A une R-algèbre [1], libre en tant que R-module et $(\Lambda, \geq)$ un ensemble fini partiellement ordonné.

On suppose de plus que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un ensemble fini $\mathcal{T}(\lambda)$ et des éléments $c^\lambda_{\mathfrak{st}} \in A$ pour tout $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ tel que :

$$\mathscr{C} = \left\{c^\lambda_{\mathfrak{st}}, \lambda \in \Lambda,\ \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\right\}$$

est une base (libre) de A.

On note enfin, pour $\lambda \in \Lambda$, $\hat{A}^\lambda$ le R-sous-module de A de base $\{c^\mu_{\mathfrak{uv}}, \mu \in \Lambda, \mu > \lambda,\ \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\mu)\}$ et A^λ le R-sous-module de A de base $\{c^\mu_{\mathfrak{uv}}, \mu \in \Lambda, \mu \geq \lambda,\ \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\mu)\}$.

1. R comme *ring*, A comme *algèbre*

Dans la suite, on se donne toujours $\lambda \in \Lambda$.

En réalité, pour les théorèmes qui nous intéressent, on supposera que R est un corps.

Remarque. On a $\hat{A}^\lambda \subset A^\lambda$ et $A^\lambda/\hat{A}^\lambda$ a pour base $\left\{c_{\mathfrak{st}}^\lambda + \hat{A}^\lambda, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\right\}$.

Définition 1.1 (Bases cellulaire)**.** On dit que $(\mathscr{C}, \Lambda)$ est une *base cellulaire* de A si :

1. l'application R-linéaire déterminée par $* : \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & A \\ c_{\mathfrak{st}}^\lambda & \longmapsto & c_{\mathfrak{ts}}^\lambda \end{pmatrix}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$, est un anti-isomorphisme d'algèbre de A,
2. pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$, il existe $(r_{\mathfrak{v}}) \in R^{\mathcal{T}(\lambda)}$ tel que pour tout $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$,

$$c_{\mathfrak{st}}^\lambda a \equiv \sum_{\mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{v}} c_{\mathfrak{sv}}^\lambda \mod \hat{A}^\lambda. \tag{1}$$

Définition 1.2 (Algèbre cellulaire)**.** Si A possède une base cellulaire, on dit que A est une *Algèbre cellulaire.*

Remarque. Une algèbre cellulaire peut avoir plusieurs bases cellulaires !

Exemple 1.3. On peut prendre $A = R[X]/(X^n)$ (X indéterminée) et $(\Lambda, \geq) = ([\![0, n-1]\!], \geq)$. En prenant $\mathcal{T}(i) = \{i\}$ et $c_{ii}^i = X^i$ pour tout $n \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$$

est une base cellulaire de A.

Exemple 1.4. On peut prendre $A = M_{n,n}(R)$, $\Lambda = \{n\}$ et $\mathcal{T}(n) = [\![1, n]\!]$. Avec $c_{ij}^n = E_{ij}$ les matrices élémentaires, pour $1 \leq i, j \leq n$,

$$\left\{E_{ij}, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\right\}$$

est une base cellulaire de A.

Proposition 1.5. Par le théorème d'Artin-Wedderburn [2], toute algèbre semi-simple est cellulaire.

Commençons par quelques propriétés élémentaires.

Lemme 1.6. Soit $\lambda \in \Lambda$.

1. Supposons que $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$ et $a \in A$. Alors, pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$,

$$a^* c_{\mathfrak{st}}^\lambda \equiv \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{u}} c_{\mathfrak{ut}}^\lambda \mod \hat{A}^\lambda,$$

où les $r_{\mathfrak{u}} \in R$ sont déterminés par (1),

2. Admis : A est isomorphe à un produit d'espace de matrices carrées à valeurs dans des corps (commutatifs ou non).

2. A^λ et $\hat{A}^\lambda$ sont des idéaux (à droite et à gauche) de A,
3. Soient $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$, alors il existe $r_{\mathfrak{st}} \in R$ tel que pour tout $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\lambda)$,

$$c^\lambda_{\mathfrak{us}} c^\lambda_{\mathfrak{tv}} \equiv r_{\mathfrak{st}} c^\lambda_{\mathfrak{uv}} \mod \hat{A}^\lambda.$$

Preuve. Le premier point s'obtient en appliquant $*$ à (1). Grâce aux deux équations, on a bien mis en évidence que A^λ est un idéal à droite et à gauche de A. Comme $\hat{A}^\lambda = \sum_{\mu > \lambda} A^\mu$, le second point s'en suit. Enfin, en utilisant toujours les 2 équations, on a, pour $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} c^\lambda_{\mathfrak{us}} c^\lambda_{\mathfrak{tv}} &\equiv \sum_{\mathfrak{w} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{w}} c^\lambda_{\mathfrak{uw}} \mod \hat{A}^\lambda \\ &= c^{\lambda *}_{\mathfrak{su}} c^\lambda_{\mathfrak{tv}} \equiv \sum_{\mathfrak{w} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{w}} c^\lambda_{\mathfrak{wv}} \mod \hat{A}^\lambda. \end{aligned}$$

La base cellulaire étant libre, il ne reste qu'à identifier les $r_{\mathfrak{w}}$ pour conclure.

□

Remarque.

— Au travers des A^λ, la base cellulaire détermine une filtration de A.

— Il existe une forme bilinéaire définie sur chaque quotient $A^\lambda / \hat{A}^\lambda$ de la filtration (voir $r_{\mathfrak{st}}$). On y reviendra par la suite.

Définition 1.7 ($C^\lambda_{\mathfrak{s}}$)**.** Pour $\lambda \in \Lambda$ fixé et $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$, on définit $C^\lambda_{\mathfrak{s}}$ le R-sous-module de $A^\lambda / \hat{A}^\lambda$ ayant pour base $\left\{ c^\lambda_{\mathfrak{st}} + \hat{A}^\lambda, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda) \right\}$.

Remarque. $C^\lambda_{\mathfrak{s}}$ est un A-module à droite d'après (1), et l'action de A sur $C^\lambda_{\mathfrak{s}}$ est indépendante de $\mathfrak{s}$. Ainsi, pour tout $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$, $C^\lambda_{\mathfrak{s}} \cong C^\lambda_{\mathfrak{t}}$.

On définit donc :

Définition 1.8 (Module cellulaire C^λ)**.** On définit le module cellulaire C^λ comme le A-module à droite, libre en tant que R-module de base $\left\{ c^\lambda_{\mathfrak{t}}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda) \right\}$, où, pour $a \in A$:

$$c^\lambda_{\mathfrak{t}} a = \sum_{\mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{v}} c^\lambda_{\mathfrak{v}}, \tag{2}$$

où les $r_{\mathfrak{v}} \in R$ sont déterminés par (1).

Proposition 1.9. L'application R-linéaire déterminée par $\begin{pmatrix} C^\lambda & \longrightarrow & C^\lambda_{\mathfrak{s}} \\ c^\lambda_{\mathfrak{t}} & \longmapsto & c^\lambda_{\mathfrak{st}} + \hat{A}^\lambda \end{pmatrix}$ montre que pour tout $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$, $C^\lambda \cong C^\lambda_{\mathfrak{s}}$.

Remarque. L'équation (2) définit une action de A sur C^λ.

Proposition 1.10. Grâce à la définition 1.7 et la propriété 1.9, on a :

$$A^\lambda/\hat{A}^\lambda \cong \bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\lambda)} C^\lambda_{\mathfrak{s}} \cong \bigoplus_{i=1}^{|\mathcal{T}(\lambda)|} C^\lambda. \tag{3}$$

Voyons maintenant un lemme technique, qui sera utile dans la suite :

Lemme 1.11. Soient $a \in C^\lambda$ et $y \in A^\mu$. Si $ay \neq 0$, alors $\lambda \geq \mu$.

Preuve. Soit $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$, on identifie C^λ et $C^\lambda_{\mathfrak{s}}$. Par définition, $ay = 0$ pour tout $a \in C^\lambda_{\mathfrak{s}}$ si et seulement si $c^\lambda_{\mathfrak{st}}y \in \hat{A}^\lambda$ pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$, par le lemme 1.6. Toujours par ce lemme, A^λ et A^μ sont des idéaux de A, donc $c^\lambda_{\mathfrak{st}}y \in A^\lambda \cap A^\mu \subseteq \hat{A}^\lambda$ si $\lambda \ngeq \mu$, ce qui termine la preuve. □

Revenons à la forme bilinéaire remarquée plus haut :

Définition 1.12 ($\langle\cdot,\cdot\rangle$)**.** Par le lemme 1.6 (voir $r_{\mathfrak{st}}$), il existe une unique application bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : C^\lambda \times C^\lambda \to R$ tel que pour tout $\mathfrak{s},\mathfrak{t},\mathfrak{u},\mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\lambda)$, on ait :

$$\left\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}}, c^\lambda_{\mathfrak{t}}\right\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}} \equiv c^\lambda_{\mathfrak{us}}c^\lambda_{\mathfrak{tv}} \mod \hat{A}^\lambda.$$

On peut tout d'abord regarder quelques propriétés de calculs liées à cette définition :

Proposition 1.13. Soient $\lambda \in \Lambda$ et $x, y \in C^\lambda$. On a :

— $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

— $\langle xa, y\rangle = \langle x, ya^*\rangle$ pour tout $a \in A$,

— $xc^\lambda_{\mathfrak{uv}} = \left\langle x, c^\lambda_{\mathfrak{u}}\right\rangle c^\lambda_{\mathfrak{v}}$ pour tout $\mathfrak{u},\mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\lambda)$.

Preuve. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ étant bilinéaire, il suffit de prouver les résultats pour $x = c^\lambda_{\mathfrak{s}}$ et $y = c^\lambda_{\mathfrak{t}}$ pour $\mathfrak{s},\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ fixés. Soient $\mathfrak{u},\mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\lambda)$, on a :

$$\left\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}}, c^\lambda_{\mathfrak{t}}\right\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}} \equiv c^\lambda_{\mathfrak{us}}c^\lambda_{\mathfrak{tv}} = \left(c^\lambda_{\mathfrak{vt}}c^\lambda_{\mathfrak{su}}\right)^* \equiv \left(\left\langle c^\lambda_{\mathfrak{t}}, c^\lambda_{\mathfrak{s}}\right\rangle c^\lambda_{\mathfrak{vu}}\right)^* = \left\langle c^\lambda_{\mathfrak{t}}, c^\lambda_{\mathfrak{s}}\right\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}} \mod \hat{A}^\lambda.$$

De même :

$$\left\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}}a, c^\lambda_{\mathfrak{t}}\right\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}} \equiv \left(c^\lambda_{\mathfrak{uv}}a\right) c^\lambda_{\mathfrak{tv}} = c^\lambda_{\mathfrak{uv}}\left(ac^\lambda_{\mathfrak{tv}}\right) \equiv \left\langle c^\lambda_{\mathfrak{s}}, c^\lambda_{\mathfrak{t}}a^*\right\rangle c^\lambda_{\mathfrak{uv}} \mod \hat{A}^\lambda.$$

Le dernier point est évident via l'identification de la propriété 1.9. □

Remarque. En particulier, on a montré que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique et associative.

Utilisons maintenant cette forme pour définir des objets, centraux dans le théorème qui nous intéresse.

Définition 1.14 (Radical et D^λ)**.** On définit $\operatorname{rad} C^\lambda := \left\{x \in C^\lambda, \forall y \in C^\lambda, \langle x, y\rangle = 0\right\}$. Par la proposition 1.13, $\operatorname{rad} C^\lambda$ est un A-sous-module de C^λ. On peut donc également définir $D^\lambda := C^\lambda / \operatorname{rad} C^\lambda$.

Notation. On note $\Lambda_0 := \{\mu \in \Lambda, D^\mu \neq 0\}$.

Remarque. On a : $\mu \in \Lambda_0$ si et seulement si $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est non nulle sur C^μ.

Proposition 1.15. Supposons que R soit un corps, et soit $\mu \in \Lambda_0$. Alors le A-module droit D^μ est absolument irréductible.

Preuve. Soit $x \in C^\mu \setminus \operatorname{rad} C^\mu$, $x \neq 0$. Alors il existe $y \in C^\mu$ tel que $\langle x, y\rangle \neq 0$. R étant un corps, on peut supposer $\langle x, y\rangle = 1$. On écrit $y = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\mu)} r_\mathfrak{s} c^\mu_\mathfrak{s}$ pour $(r_\mathfrak{s}) \in R^{\mathcal{T}(\mu)}$, puis on pose, pour chaque $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\mu)$ $y_\mathfrak{t} = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\mu)} r_\mathfrak{s} c^\mu_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$. Par la proposition 1.13, on a :

$$xy_\mathfrak{t} = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\mu)} r_\mathfrak{s} x c^\mu_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\mu)} r_\mathfrak{s} \left\langle x, c^\mu_\mathfrak{s}\right\rangle c^\mu_\mathfrak{t} = \langle x, y\rangle\, c^\mu_\mathfrak{t} = c^\mu_\mathfrak{t}.$$

Ainsi, x génère C^μ vu en tant que A-module droit. L'élément x étant quelconque, D^μ est irréductible dans R et toutes ses extensions, donc D^μ est absolument irréductible.

□

On s'intéresse justement aux modules irréductibles. On va voir qu'on peut en réalité se ramener aux D^μ.

Proposition 1.16. Supposons que R soit un corps, et soient $\lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda_0$, M un sous-module propre de C^λ et $\theta : C^\mu \to C^\lambda / M$ un morphisme de A-modules. Si $\theta \neq 0$, alors $\lambda \geq \mu$.

Preuve. Comme à la proposition précédente, soient $x, y \in C^\mu$ tel que $\langle x, y\rangle = 1$, et pour $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\mu)$, $y_\mathfrak{t} = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\mu)} r_\mathfrak{s} c^\mu_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$. On a toujours $xy_\mathfrak{t} = c^\mu_\mathfrak{t}$. Par définition, on a $\theta(x) = M + a_\theta$ pour un certain $a_\theta \in C^\lambda$. Il vient alors, pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\mu)$:

$$\theta\left(c^\mu_\mathfrak{t}\right) = \theta\left(xy_\mathfrak{t}\right) = \theta(x) y_\mathfrak{t} = M + a_\theta y_\mathfrak{t}.$$

Par le lemme 1.11, si $\theta \neq 0$, alors il existe $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\mu)$ tel que $a y_\mathfrak{t} \neq 0$, donc $\lambda \geq \mu$.

□

Corollaire 1.17. Supposons que R soit un corps et soient $\lambda, \mu \in \Lambda_0$ tels que $D^\mu \cong D^\lambda$. Alors $\mu = \lambda$.

Preuve. On a accès à un morphisme de A-modules non nul entre C^μ et D^λ, donc, par la proposition précédente, $\lambda \geq \mu$. Par symétrie, il vient bien $\lambda = \mu$.

□

2 Le théorème de Graham–Lehrer

On commence par quelques définitions supplémentaires qui seront utiles dans la preuve du théorème.

Définition 2.1 (Idéal)**.** On appelle $\Gamma \subset \Lambda$ un idéal au sens de la théorie des ordres de Λ si pour tout $\mu \in \Gamma$, si $\lambda > \mu$, alors $\lambda \in \Gamma$. [3]

Définition 2.2 (Sous-module engendré par un idéal)**.** Pour Γ un idéal au sens de la théorie des ordres, on note $A(\Gamma)$ le R-sous-module de A de base $\{c^{\mu}_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}, \mu \in \Gamma, \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\mu)\}$.

Remarque. Dans ces conditions, $A(\Gamma) = \sum_{\mu \in \Gamma} A^{\mu}$, donc $A(\Gamma)$ est un idéal (à droite et à gauche) de A, par le lemme 1.6.

Théorème 2.3 (de Graham-Lehrer)**.** Supposons que R soit un corps. Alors $\{D^{\mu}, \mu \in \Lambda_0\}$ est un ensemble complet de A-modules irréductibles non isomorphes.

Preuve. On s'attarde sur deux lemmes dont on verra l'utilité immédiatement.

Lemme 2.4. Soit $\emptyset = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_k = \Lambda$ une chaîne maximale d'idéaux de Λ. Alors il existe un ordonnement $\mu_1, \ldots, \mu_k$ de Γ tel que $\Gamma_i = \{\mu_1, \ldots, \mu_i\}$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, et tel que :

$$0 = A(\Gamma_0) \hookrightarrow A(\Gamma_1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow A(\Gamma_k) = A$$

est une filtration de A dont les facteurs sont $A(\Gamma_i)/A(\Gamma_{i-1}) \cong A^{\mu_i}/\hat{A}^{\mu_i}$.

Preuve. Comme la chaîne est maximale, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $|\Gamma_i \backslash \Gamma_{i-1}| = 1$. En notant $\Gamma_i \backslash \Gamma_{i-1} = \{\mu_i\}$ pour $i \in [\![1, k]\!]$, on a bien :

$$\text{si } \mu_i > \mu_j, \text{ alors } j > i,$$

par définition de la chaîne, et $\Gamma_i = \{\mu_1, \ldots, \mu_i\}$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

Ainsi, $\hat{A}^{\mu_i} \subseteq A(\Gamma_{i-1})$, et $\{c^{\mu_i}_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} + A(\Gamma_{i-1}), \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\mu_i)\}$ est une base de l'idéal (à droite et à gauche) $A(\Gamma_i)/A(\Gamma_{i-1})$. L'isomorphisme de (A, A)-bimodules évoqué est donné par l'application R-linéaire déterminée par :

$$\left(\begin{array}{ccc} A(\Gamma_i)/A(\Gamma_{i-1}) & \longrightarrow & A^{\mu_i}/\hat{A}^{\mu_i} \\ c^{\mu_i}_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} + A(\Gamma_{i-1}) & \longmapsto & c^{\mu_i}_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} + \hat{A}^{\mu_i} \end{array} \right),$$

pour $i \in [\![1, k]\!]$.

□

3. Dans la "vraie" définition, inspirée des treillis, on demande également à ce que deux éléments de Γ aient toujours un minorant commun dans Γ, mais on ne travaille pas dans le même cadre ici.

Lemme 2.5. Soit λ un élément minimal de Λ. Alors $C^\lambda = D^\lambda$.

Preuve. Par définition, $C^\lambda = D^\lambda$ si et seulement si $\operatorname{rad} C^\lambda = 0$. Soit donc $x \in \operatorname{rad} C^\lambda$, montrons que $x = 0$. On peut l'écrire $x = \sum_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_\mathfrak{t} c^\lambda_\mathfrak{t}$, avec $(r_\mathfrak{t}) \in R^{\mathcal{T}(\lambda)}$. Soit $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$, on note $x_\mathfrak{s} = \sum_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_\mathfrak{t} c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$. Alors $x_\mathfrak{s} \in A^\lambda$, et $x_\mathfrak{s} \in \hat{A}^\lambda$ si et seulement si $x = 0$. Pour $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\lambda)$, on a, par la définition 1.12 :

$$x_\mathfrak{s} c^\lambda_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} = \sum_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_\mathfrak{t} c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} c^\lambda_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} \equiv \sum_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_\mathfrak{t} \left\langle c^\lambda_\mathfrak{t}, c^\lambda_\mathfrak{u} \right\rangle c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{v}} = \left\langle x, c^\lambda_\mathfrak{u} \right\rangle c^\lambda_{\mathfrak{s}\mathfrak{v}} = 0 \mod \hat{A}^\lambda.$$

Ainsi, $x_\mathfrak{s} a \in \hat{A}^\lambda$ pour tout $a \in A^\lambda$. De plus, par le lemme 1.6, si $a \in A^\mu$ pour $\mu \neq \lambda$, alors $x_\mathfrak{s} a \in A^\lambda \cap A^\mu \subseteq \hat{A}^\lambda$, car λ est un élément minimal de Λ. On peut en conclure que $x_\mathfrak{s} a \in \hat{A}^\lambda$ pour tout $a \in A$. On peut alors conclure en prenant $a = 1$.

□

Par la proposition 1.15, si $D^\mu \neq 0$, alors D^μ est irréductible. Par le corollaire 1.17, pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$, si $\lambda \neq \mu$, alors $D^\mu \ncong D^\lambda$. De plus, par le lemme 2.4, A possède une filtration dont les facteurs sont les modules cellulaires de A (on peut toujours construire une chaîne maximale d'idéaux). Il suffit donc de montrer que chaque facteur irréductible d'un module cellulaire C^λ est isomorphe à un D^μ, pour un certain $\mu \in \Lambda_0$.

On raisonne par induction :

— Si λ est un élément minimal de Λ, alors, par le lemme 2.5, $C^\lambda = D^\lambda$, et $\lambda \in \Lambda_0$.

— Si λ n'est pas minimal, soit D un facteur irréductible de C^λ. Alors, soit $D = D^\lambda$, soit D est un facteur de $\operatorname{rad} C^\lambda$.

  Soit $\Gamma = \{\nu \in \Lambda, \lambda \ngtr \nu\}$, alors Γ est un idéal au sens de la théorie des ordres de Λ. Ainsi, $A(\Gamma)$ est un idéal de A. Par la proposition 1.13, $A^\lambda \cdot \operatorname{rad} C^\lambda = 0$. De plus, par le lemme 1.11 si $\nu \in \Gamma$, $\nu \neq \lambda$, alors $C^\lambda \cdot A^\nu = 0$. Ainsi, $\operatorname{rad} C^\lambda \cdot A(\Gamma) = 0$, donc les facteurs de $\operatorname{rad} C^\lambda$ sont des facteurs de $A/A(\Gamma)$.

  On peut étendre $\emptyset \subset \Gamma \subset \Lambda$ en une chaîne maximale d'idéaux, et utiliser le lemme 2.4. Cela permet de voir que $A/A(\Gamma)$ possède une filtration dont les facteurs sont isomorphes aux modules cellulaires C^ν, avec $\nu \notin \Gamma$, ce qui revient, par définition de Γ, à $\lambda > \nu$. Par induction, les facteur irréductibles de C^ν sont isomorphes à des D^μ pour des $\mu \in \Lambda_0$, ce qui termine la preuve.

□

3 Exemple : l'algèbre d'Iwahori-Hecke du groupe symétrique

On va enfin chercher à construire un exemple plus complexe d'algèbre cellulaire. Cette algèbre intervient dans l'étude des représentations des groupes linéaires définis sur les corps à q éléments, q puissance d'un nombre premier. C'est également un objet d'étude en lui même, comme "déformation" du groupe symétrique, comme on va le voir.

Définition 3.1 (Algèbre d'Iwahori-Hecke)**.** On appelle algèbre d'Iwahori-Hecke de $\mathfrak{S}_n$ associée à R et $q \in R$ la R-algèbre $\mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$ dont les générateurs $\{T_i, i \in [\![1, n-1]\!]\}$ vérifient les relations :

$$\begin{array}{rcll} (T_i - q)(T_i + 1) & = & 0 & \text{pour } i \in [\![1, n-1]\!], \\ T_iT_j & = & T_jT_i & \text{pour } 1 \leq i < j-1 \leq n-2, \\ T_iT_{i+1}T_i & = & T_{i+1}T_iT_{i+1} & \text{pour } i \in [\![1, n-2]\!]. \end{array}$$

Remarque. Avec $q = 1$, l'algèbre est isomorphe à $R\mathfrak{S}_n$, en identifiant les générateurs avec les transpositions $(i\ i+1)$. On parle de déformation de $R\mathfrak{S}_n$.

Notation. On note, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $s_i := (i\ i+1)$, et $S := \{s_i, i \in [\![1, n-1]\!]\}$.

Commençons par donner une base de $\mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$.

Proposition 3.2. Pour $w \in \mathfrak{S}_n$, on note $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ une expression réduite (c'est à dire avec $\ell(w) := k$ minimal) de w, et on note :

$$T_w = T_{i_1} \dots T_{i_k}.$$

Remarque. D'après le théorème de Matsumoto [4], T_w est bien définit : il ne dépend pas du choix de l'expression réduite de w. Si $w = Id$, on identifie $T_w = 1 = 1_R$.

Pour mieux comprendre l'algèbre, voyons une règle de calcul élémentaire :

Lemme 3.3. Soient $s \in S$ et $w \in \mathfrak{S}_n$. Alors

$$T_wT_s = \begin{cases} T_{ws}, & \text{si } \ell(ws) > \ell(w), \\ qT_{ws} + (q-1)T_w, & \text{si } \ell(ws) < \ell(w). \end{cases}$$

Remarque. Ce lemme provient du lemme suivant, corollaire du théorème de condition d'échange forte :

4. admis ici car trop de théorie est à mettre en place, se prouve grâce à de la combinatoire et aux cocycles de Dyer.

Corollaire 3.4. Soit $w \in \mathfrak{S}_n$ et $s \in S$, alors : $\ell(ws) < \ell(w)$ si et seulement si w possède une expression réduite se terminant par s.

Théorème 3.5. L'algèbre $\mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$ est libre comme R-module de base $\{T_w, w \in \mathfrak{S}_n\}$.

Preuve. Par le lemme 3.3, $\{T_w, w \in \mathfrak{S}_n\}$ est bien générateur. Il faut donc montrer que ces éléments sont indépendants. Pour cela, on construit un endomorphisme d'algèbre généré par des éléments satisfaisant les relations dans $\mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$. La preuve est longue et assez technique : une grande partie cherche à montrer qu'elle est bien compatible avec toutes les relations vérifiées par les T_i. Les lecteur·rice·s chevronné·e·s pourront la trouver dans [Mat99].

□

Corollaire 3.6. L'algèbre $\mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$ possède 2 représentations de dimensions 1 définies par, pour $w \in \mathfrak{S}_n$:

$$1_{\mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)}(T_w) = q^{\ell(w)} \text{ et } \varepsilon_{\mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)}(T_w) = (-1)^{\ell(w)}.$$

Remarque. Ces deux représentations sont les analogues de la représentation triviale et de la représentations signature.

Corollaire 3.7. Soit $\varphi : \hat{R} \to R$ un morphisme d'anneau et $\hat{q} \in \hat{R}$ et que $\varphi(\hat{q}) = q$. Alors $\mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$ et $\mathscr{H}_{\hat{R},\hat{q}}(\mathfrak{S}_n) \otimes_{\hat{R}} R$ sont isomorphe en tant que R-algèbres.

Preuve. Le produit tensoriel a bien un sens car R peut être considéré comme un $\hat{R}$-module via l'action $\hat{r} \cdot r = \varphi(\hat{r})r$ pour $\hat{r} \in \hat{r}$ et $r \in R$. Par le théorème 3.5, $\mathscr{H}_{\hat{R},\hat{q}}(\mathfrak{S}_n) \otimes_{\hat{R}} R$ est libre en tant que R-module de base $\{T_i \otimes 1, i \in [\![1, n-1]\!]\}$, qui vérifient les relation de la définition 3.1. On a donc bien accès à un morphisme d'algèbre déterminé par $\begin{pmatrix} \mathscr{H} & \longrightarrow & \mathscr{H}_{\hat{R},\hat{q}}(\mathfrak{S}_n) \otimes_{\hat{R}} R \\ T_i & \longmapsto & T_i \otimes 1 \end{pmatrix}$. Avec cette application, T_w est envoyé sur $T_w \otimes 1$, donc c'est un isomorphisme !

□

Définition 3.8 (Spécialisation)**.** Dans le cadre du corollaire précédent, on dit que $\mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$ est une spécialisation de $\mathscr{H}_{\hat{R},\hat{q}}(\mathfrak{S}_n)$.

Exemple 3.9. Soit $q \in R^\times$. On pose $\Lambda = \{(3), (2,1), (1^3)\}$ les partitions de 3 et on le munit de l'ordre lexicographique. On note $\mathfrak{s} = \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$, $\mathfrak{t} = \begin{smallmatrix} \boxed{1}\boxed{2} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}$, $\mathfrak{u} = \begin{smallmatrix} \boxed{1}\boxed{3} \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}$ et $\mathfrak{v} = \begin{smallmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{smallmatrix}$, et on pose $\mathcal{T}(3) = \{\mathfrak{s}\}$, $\mathcal{T}(2,1) = \{\mathfrak{t}, \mathfrak{u}\}$ et $\mathcal{T}(1^3) = \{\mathfrak{v}\}$, et enfin :

$$\begin{aligned} c_{\mathfrak{ss}}^{(3)} &= 1 + T_1 + T_2 + T_1T_2 + T_2T_1 + T_1T_2T_1, \\ c_{\mathfrak{tt}}^{(2,1)} &= 1 + T_1, & c_{\mathfrak{ut}}^{(2,1)} &= T_2(1 + T_1), \\ c_{\mathfrak{tu}}^{(2,1)} &= (1 + T_1)T_2, & c_{\mathfrak{uu}}^{(2,1)} &= T_2(1 + T_1)T_2, \\ c_{\mathfrak{vv}}^{(1^3)} &= 1. \end{aligned}$$

On peut vérifier "à la main" (long mais élémentaire) que $(\mathscr{C}, \Lambda)$ est une base cellulaire de $A = \mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$.

Dans cet exemple, on a :

— $A^{(1^3)} = c_{\mathfrak{vv}}^{(1^3)} A$, $\hat{A}^{(1^3)} = \left(\mathscr{C} \backslash \{c_{\mathfrak{vv}}^{(1^3)}\}\right) A$, $\left\langle c_{\mathfrak{v}}^{(1^3)}, c_{\mathfrak{v}}^{(1^3)} \right\rangle = 1$ et donc $\operatorname{rad} C^{(1^3)} = 0$. Ainsi, $D^{(1^3)} = c_{\mathfrak{vv}}^{(1^3)} A / \hat{A}^{(1^3)}$ est irréductible.

— $A^{(3)} = c_{\mathfrak{ss}}^{(3)} A$, $\hat{A}^{(3)} = 0$. On peut calculer $\langle c_{\mathfrak{s}}, c_{\mathfrak{s}} \rangle = (1+q)(1+q+q^2)$. Si q est racine du polynôme précédent, $D^{(3)} = 0$, et alors, comme $c_{\mathfrak{ss}}^{(3)} A$ est irréductible (car de dimension 1 en tant que A-module), soit $c_{\mathfrak{ss}}^{(3)} A \cong D^{(1^3)}$, soit $c_{\mathfrak{ss}}^{(3)} A \cong D^{(2,1)}$.

Les choix faits dans cet exemple sont en lien avec le théorème suivant :

Théorème 3.10 (admis)**.** Pour q "proche" de 1, les $\mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$-modules irréductibles sont en correspondance avec les diagrammes de Young.

Pour en savoir plus, on peut se référer à [Jon87].

Références

[GL96] J. J. Graham and G. I. Lehrer. Cellular algebras. *Inventiones Mathematicae*, 123(1) :1–34, December 1996.

[Jon87] V. F. R. Jones. Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials. *The Annals of Mathematics*, 126(2) :335, September 1987.

[Mat99] Andrew Mathas. *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group*. Number v. 15 in University lecture series. American Mathematical Society, Providence, R.I, 1999.