266 - Illustration de la notion d'indépendance en probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X_i, $i \in I$, une famille de variables aléatoires (v.a) sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans un espace probabilisé $(E, \mathcal{B})$.

I/ Présentation de la notion d'indépendance

Définition 1. Une famille d'évènements $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, est mutuellement indépendante si pour tout $J \subset I$ fini,

$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Exemple 1. $\Omega = \{0,1,2,3\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} \delta_i$ (uniforme).

Les évènements $A_i = \{0, i\}$, $i \in \{1,2,3\}$, sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Définition 2. Une famille de sous-tribus $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$, $i \in I$, est (mutuellement) indépendante si toute famille d'évènements $A_i \subset \mathcal{A}_i$, $i \in I$, est mutuellement indépendante.

Définition 3. Les v.a. X_i, $i \in I$, sont indépendantes si la famille $\sigma(X_i)$, $i \in I$, est indépendante.

Proposition 1. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Les v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. $(n \geq 1)$

(ii) La loi $P^{(X_1,\dots,X_n)}$ du vecteur aléatoire est égale au produit $P^{X_1} \otimes \dots \otimes P^{X_n}$ des lois marginales.

(iii) Pour toute famille de fonctions boréliennes $\phi_1, \dots, \phi_n$ telle que $\phi_i(X_i)$ soit intégrable, on a:

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \phi_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\phi_i(X_i)].$$

Proposition 2. Si les lois des v.a indépendantes X, Y admettent des densités respectives f et g par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, alors la v.a. (X,Y) admet la densité $x, y \mapsto f(x)\,g(y)$.

Réciproquement, si (X,Y) admet une densité $h: x,y \mapsto f(x) \cdot g(y)$, alors f et g sont (à un facteur positif près) les densités respectives de X et Y, et les v.a X, Y sont indépendantes.

Exemple 2. Soit $(U,V) \sim \mathcal{U}(]0,1[) \otimes \mathcal{U}(]0,1[)$.

Posons $X = \sqrt{-2\ln(V)}\cos(2\pi U)$ et $Y = \sqrt{-2\ln(V)}\sin(2\pi U)$.

Alors X, Y sont indépendantes et suivent une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Définition 4. Deux v.a. réelles $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont non corrélées si leur covariance est nulle, c'est-à-dire:

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$.

D'après la proposition 1, deux v.a indépendantes de carré intégrable sont non corrélées.

II/ Exemples de calculs de lois utilisant l'indépendance

Proposition 3. La loi de la somme de deux v.a.r indépendantes est donnée par le produit de convolution des lois marginales:

$P^{X+Y} = P^X * P^Y$, avec pour toute fonct° borélienne bornée ϕ de $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \, d(P^X * P^Y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x+y)\, dP^Y(y)\right) dP^X(x).$$

En particulier, si les lois P^X et P^Y admettent des densités respectives f et g, la loi de la somme $X+Y$ a une densité h donnée par le produit de convolution des fonctions f et g :

$$h(x) = f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Exemple 3. Soit $X, Y \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \otimes \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.
Alors $X+Y \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Proposition 4. La fonction caractéristique de la somme de deux v.a indépendantes X et Y est donnée par le produit des fonctions caractéristiques : $\varphi^{X+Y}(t) = \varphi^X(t) . \varphi^Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 4. Si $(X,Y) \sim \mathcal{P}(\lambda) \otimes \mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Proposition 5. Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a i.i.d de fonction de répartition F. Alors $F_{Max}(t) := P(Max X_i \leq t) = F(t)^n$
et $F_{Min}(t) := P(Min X_i \leq t) = 1 - (1-F(t))^n$, $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 5. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a i.i.d de loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. On note $M_n = Max(X_1, \dots, X_n)$.
On a $\cdot$ $M_n \xrightarrow[n \to \infty]{Loi} 1$ et $M_n \xrightarrow[n \to \infty]{p.s} 1$

$\cdot$ $n(1-M_n) \xrightarrow[n \to \infty]{Loi} E$ où $E \sim \mathcal{E}(1)$.

III/ Indépendance et évènements asymptotiques

Définition 5. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite indépendante de tribus sur (Ω, A, P). On note $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} A_n := \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$. On appelle tribu asymptotique la tribu $A_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\bigvee_{p \geq n} A_n)$.

Théorème 1. Si A_∞ est une tribu asymptotique, alors tout $A \in A_\infty$ vérifie $P(A) = 0$ ou 1.

Exemple 6. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a réelles indépendantes sur (Ω, A, P). Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ converge ou diverge presque sûrement.

Théorème 2. (Lemme de Borel-Cantelli). Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements sur l'espace probabilisé (Ω, A, P).
(i) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) < +\infty$ alors $P(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 0$

(ii) Si la suite $(A_n)_n$ est indépendante, alors :
$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = +\infty$ implique $P(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 1$

Exemple 7. On jette une infinité de fois une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir une infinité de fois deux piles consécutifs est égale à 1.

Dans le reste de cette section, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a réelles, indépendantes, et de même loi qu'une variable X.
Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Théorème 3 (Loi faible des grands nombres). Si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, alors $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilités vers $\mathbb{E}[X]$ lorsque $n \to \infty$.

Théorème 4. Les deux conditions suivantes sont équivalentes

(i) $\mathbb{E}[|X|] < \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X]$ p.s.

Exemple 8. Presque tout nombre de $[0,1]$ admet en moyenne autant de 0 et de 1 dans son développement dyadique.

Théorème 5 (Théorème central limite). (i) Si $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, alors $\frac{S_n - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0, Var(X))$.

(ii) Si $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi, alors $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et la loi limite est normale centrée, de variance $Var(X)$.

IV/ Deux applications : la loi binomiale et la loi Zêta

Définition 6. La loi binomiale de paramètres n, p, notée $\mathcal{B}(n,p)$, est la loi de la somme de n variables de Bernoulli de paramètres p, indépendantes. $\mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}(p)^{*n}$.

Proposition 6. $\mathcal{B}(n,p)$ charge les entiers de $[\![0,n]\!]$ via la formule : $\mathcal{B}(n,p)(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$.

Théorème 6 (central limite poissonien). Soit S_n une v.a de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda > 0$, S_n converge en loi vers une v.a de Poisson de paramètre λ.

Définition 7. Pour $s > 1$ on appelle loi Zêta de paramètre s la loi sur $\mathbb{N}^*$ qui assigne la masse $\frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$ au point n.

Le coefficient $\zeta(s)$ est la fonction de Riemann évaluée en s :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Proposition 7. En notant $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite des nombres premiers, on a pour tout $s > 1$:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{i=1}^{+\infty} (1 - p_k^{-s}) \quad \text{et} \quad \ln(\zeta(s)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-\ln(1 - p_k^{-s})).$$

Application. Il n'existe pas de mesure de probabilité μ sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(n\mathbb{N}) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

("Inexistence d'une loi uniforme sur $\mathbb{N}$").