Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

244

I Fonctions analytiques

1- Séries entières - Rayon de convergence

Lemme 1 (Abel) : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ est borné. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Déf 2 : On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des $r \geq 0$ tels que $(a_n r^n)$ est borné.

Thm 3 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ est abs convergente ; et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $(a_n z^n)$ est non borné.

Méthodes de calcul du rayon de convergence :
- comparaison des fonctions
- Formule d'Hadamard : $R = 1/\overline{\lim}\, |a_n|^{1/n}$.
- Règle de d'Alembert : si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = k$, $R = 1/k$.

Thm 4 : Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.

Exemple 5 : Le rayon de convergence de $\sum (\mathrm{ch}\frac{1}{n})^{n^3} = \sqrt{e}$.

Thm 6 : Une série entière converge normalement, donc uniformément, sur tout compact contenu dans son disque ouvert de convergence.

Exemple 7 : $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 mais ne converge pas uniformément sur $D(0,1)$ car diverge pour $z=1$.

Thm 8 : La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

Prop 9 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence resp. $R>0$ et $R'>0$.
- Le rayon de convergence de $\sum (a_n+b_n) z^n$ est $\geq R \wedge R'$.
- Le rayon de convergence de $\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ est $\geq R \wedge R'$.

2- Fonctions analytiques

On travaille avec la variable réelle ou complexe

Déf 10 : Une fonction f définie au voisinage de x_0 est développable en série entière au point x_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$ telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ pour $|x-x_0| < R$.

Déf 11 : Soient D un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur D. f est dite analytique sur D si pour tout point x_0 de D, f est développable en série entière au point x_0.

Exemples 12 :
- Les polynômes sont analytiques sur $\mathbb{R}$ (resp sur $\mathbb{C}$).
- Les fractions rationnelles sont analytiques sur le complémentaire de leurs pôles.

Prop 13 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. On note f sa somme. Alors f est une fonction analytique sur le disque ouvert de convergence.

Rq 14 : Sous ces mêmes hypothèses, si x_0 est dans le disque ouvert de convergence, f est donc développable en série entière en x_0 et de plus, le rayon de convergence associé est $\geq R - |x_0|$. Cependant, ce rayon de convergence peut être $> R - |x_0|$.

Exemple 15 : Soit la série entière $\sum i^n z^n$. Soit f sa somme. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $f(z) = \frac{1}{1-iz}$. Soit $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|z_0| < 1$.

$$\frac{1}{1-iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{(1-iz_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

et cette dernière série entière converge pour $|z-z_0| < (1+|z_0|^2)^{1/2}$ et $(1+|z_0|^2)^{1/2} > 1-|z_0|$.

3- Théorèmes généraux

Thm 16 : Soit f une fonction analytique dans un ouvert connexe D de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $x_0 \in D$. Sont équivalentes :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(x_0) = 0$.

(ii) f est identiquement nulle dans un voisinage de x_0.

(iii) f est identiquement nulle dans D.

Cor 17 : Si deux fonctions analytiques f et g dans un ouvert connexe D coïncident au voisinage d'un point de D, elles sont identiques dans D. $D \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rq 18 : Le résultat précédent est appelé principe du prolongement analytique.

Thm 19 : Si f est une fonction analytique dans un ouvert connexe D de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si f n'est pas identiquement nulle, l'ensemble des zéros de f est un ensemble discret.

Rq 20 : Le thm précédent est le principe des zéros isolés.

II Analyticité réelle

On travaille ici avec des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$.

1. Spécificités de la variable réelle.

Thm 21 : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x et de rayon de convergence R et de somme f. f est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme de la série dérivée d'ordre p, i.e

$$\forall x \in]-R,R[: f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n$$

Corollaire 22 : Toute fonction réelle analytique sur D ouvert de $\mathbb{R}$ est C^∞ sur D.

Exemple 23 : La fonction $x \mapsto e^{-1/x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

Thm (24) (Borel) : Soit (a_p) une suite de nombres réels. Il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}(0) = a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Prop 25 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ est développable en série entière sur un voisinage de 0 ssi il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonctions (R_n) définie par

$$R_n : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

tende simplement vers 0 sur $]-\alpha,\alpha[$. La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a alors un rayon de convergence $\geq \alpha$ et f est égale à la somme de cette série entière sur $]-\alpha,\alpha[$.

Exemple 26 :

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Thm 27 (Bernstein) : Soit a un nombre réel >0 et f une fonction de classe C^∞ de $[-a,a]$ dans $\mathbb{R}$. Si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f^{(2n)} \geq 0$, f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a,a[$.

Exemple 28 : $\tan$ est développable en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exemples 29 :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in]-1,1[: \log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

2- Exemples d'utilisation

Résolution d'équations différentielles : recherche d'une solution développable en série entière autour d'un point, récurrence sur les coefficients et synthèse.

Dénombrement : utilisation des séries génératrices. Par exemple, le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ est
$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

III Analyticité complexe

1- Holomorphie

Thm 30 : Toute fonction analytique sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert est holomorphe sur Ω.

Thm 31 (Cauchy) : Soit f une application holomorphe de Ω ouvert de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\mathbb{D}(a,r) \subset \Omega$:
$$\forall z \in \mathbb{D}(a,r) : f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}(a,r)} \frac{f(u)}{u-z} du$$

Corollaire 32 : Une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ y est analytique.

Rq 33 : Les fonctions holomorphes satisfont donc au principe de prolongement analytique et au principe des zéros isolés.

Propriété 34 (Formule des compléments) :
$$\forall z \in \mathbb{C},\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1 : \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$ DEV 1

où Γ est fonction gamma d'Euler.

Rq 35 : les fonctions analytiques sur un ouvert de $\mathbb{C}$ héritent des propriétés usuelles des fonctions holomorphes, comme le théorème de Liouville par exemple (théorème faux pour les fonctions analytiques réelles comme l'illustre la fonction sinus), ou le théorème des résidus.

Application 36 : L'espace de Bergman
$$A^2(\mathbb{D}) = \{ f \in H(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dx\,dy < +\infty \}$$
est un espace de Hilbert dont une base hilbertienne est donnée par les fonctions $e_n : z \in \mathbb{D} \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$.
De plus :
$$\forall \xi \in \mathbb{D},\ \forall f \in A^2(\mathbb{D}) : f(\xi) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)}{\pi(1-\xi \bar{z})^2} dx\,dy$$
DEV 2

2. Liens avec la réelle-analyticité

Thm 37 :
1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et f analytique sur Ω. Il existe $\tilde{\Omega}$ ouvert de $\mathbb{C}$ et $\tilde{f}$ holomorphe sur $\tilde{\Omega}$ tels que $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ et $\tilde{f} = f$ dans Ω.
2. Si $\tilde{f}$ est holomorphe sur $\tilde{\Omega}$ ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\Omega = \tilde{\Omega} \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, alors $f = \tilde{f}|_{\Omega}$ est analytique sur Ω.

Propriété 38 : l'ensemble des fonctions analytiques sur un ouvert de $\mathbb{R}$ est stable par somme, quotient (sous réserve d'existence) et composition. Il en est de même pour les fonctions analytiques sur un ouvert de $\mathbb{C}$.