228

Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

I un intervalle de $\mathbb{R}$; $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

I. Fonctions continues

1) Continuité

Def 1 : f est continue en $a \in I$ si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = f(a)$.
Elle est continue sur I si elle l'est en tout point de I. On note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble de ces fonctions.

Ex 2 : • Les fonctions polynomiales, sinus, cosinus, exponentielle, sont continues sur $\mathbb{R}$.
• $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ n'est pas continue en 0
• $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est continue nulle part.

Prop 3 : $\mathcal{C}^0(I)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, stable par composition et inverse lorsque ces opérations sont définies.

Ex 4 : $x \mapsto 7\cos(x)e^{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) Valeurs intermédiaires

Thm 5 : (Des valeurs intermédiaires)
Si f est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle.

App 6 : $f \in \mathcal{C}^0(I)$; $[u,v] \subset I$ tel que $f(u)f(v) \leq 0$
Alors, l'équation $f(x) = 0$ a une solution dans $[u,v]$.

App 7 : $f : [a,b] \to [a,b]$ continue a un point fixe.

Rq 8 : Il existe des fonctions non continues vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires. (cf Fig 1)

Thm 9 : $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Alors, $f([a,b])$ est un segment.

Prop 10 : Si f est croissante sur I, et $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.

Coro 11 : $f : I \to J$, continue, bijective.
f^{-1} est alors continue sur J.

3) Deux autres formes de régularité

Def 12 : f est uniformément continue sur I si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Def 13 : f est lipschitzienne sur I si :
$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

Ex 14 : $p \in [1, +\infty]$; q son conjugué. $f \in L^p(\mathbb{R})$; $g \in L^q(\mathbb{R})$.
$f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Ex 15 : $x \mapsto \sin(x)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Prop 16 : f lipschitzienne
$\Downarrow$
f uniformément continue
$\Downarrow$
f continue

et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, ainsi que $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ sont des c-ex aux réciproques

Thm 17 : (Heine) Une fonction continue sur un segment est uniformément continue

App 18 : Intégrale de Riemann d'une fonction continue.

II. Fonctions dérivables

1) Dérivée d'une fonction

Def 19 : f est dérivable en $a \in I$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. On note $f'(a) = \ell$. (cf Fig 2)
$f'(a)$ est alors le coeff. directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a.

Ex 20 : $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 2x$.

Prop 21 : f est dérivable en $a \Leftrightarrow \exists \varphi : I \to \mathbb{R}$, continue en a telle que : $\forall x \in I$, $f(x) - f(a) = (x-a)\varphi(x)$.
On a alors : $f'(a) = \varphi(a)$.

Prop 22 : L'ensemble $D(I)$ des fonctions dérivables sur I est une $\mathbb{R}$-algèbre, stable par composition et inverse. On a alors les règles de calcul suivantes :
$(\lambda f+g)' = \lambda f' + g'$; $(fg)' = f'g + g'f$; $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$; $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$.

Coro 23 : Si f est bijective, dérivable, de dérivée ne s'annulant pas, alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Ex 24 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2) Lien avec la continuité

Prop 25 : Une fonction dérivable est continue.

C-ex 26 : $x \mapsto |x|$ est continue en 0, non dérivable en 0.

DVP 1
Thm 27 : L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables sur $[0,1]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

3) Variations et dérivée

Prop 28 : f dérivable en $a \in \mathring{I}$.
Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Rq 29 : $x \mapsto x^3$ n'a pas d'extremum en 0.

Thm 30 : (Rolle) f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$, tel que $f'(c) = 0$. (cf Fig 3)

Coro 31 : (Théorème des accroissements finis)
$f \in \mathcal{C}^0([a,b]) \cap D(]a,b[)$. Il existe alors $c \in]a,b[$, tel que : $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$. (cf Fig 4)

App 32 : $f \in D(I)$. f lipschitzienne $\Leftrightarrow f'$ bornée.

App 33 : (Darboux)
Une fonction dérivée a la propriété des valeurs intermédiaires

Prop 34 : $f \in D(I)$. On a : f croissante $\Leftrightarrow f' \geq 0$;
et : f strictement croissante $\Leftrightarrow f' \geq 0$ et $\{f' = 0\}$ ne contient pas d'intervalle non trivial.

App 35 : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\operatorname{Arctan}(x) \leq x$.

4) Dérivées d'ordre supérieur

Def 36 : $n \in \mathbb{N}^*$. On définit par récurrence :
$D^n(I) = \{$fonctions n fois dérivables sur $I\}$
$\mathcal{C}^n(I) = \{f \in D^n(I),\ f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I)\}$ et $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}^n(I)$.

Ex 37 : $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

Prop 38 : (Formule de Leibniz) $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$.
Alors $fg \in \mathcal{C}^n(I)$, et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Prop 39 : (Taylor-Lagrange)
$f \in \mathcal{C}^n([a,b]) \cap D^{n+1}(]a,b[)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

App 40 : (Etude locale de fonctions)
$\sin(x) - x \sim -\frac{x^3}{6}$ $(x \to 0)$

Def 41 : $\mathcal{D}(I) = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ à support compact $\}$

Prop 42 : $\mathcal{D}(I)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et il existe des fonctions plateaux. (cf Fig 6)

5) Limites et dérivées

Thm 43 : f continue sur $[a,b[$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :

i) si $\ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a, et $f'(a) = \ell$

ii) si $\ell \in \{\pm\infty\}$, f n'est pas dérivable en a

Thm 44 : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(I)^{\mathbb{N}}$; $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur I. Alors, f est continue sur I.

Thm 45 : $(f_n) \in \mathcal{C}^1(I)^{\mathbb{N}}$

Si $f_n \xrightarrow{cvs} f$ et $f_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$ alors $f \in \mathcal{C}^1(I)$ et $f' = g$

Ex 46 : $\zeta : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$,

et on a : $\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(n)^k}{n^x}$.

III - Distributions.

Idée 47 : généraliser la notion de fonction en s'intéressant aux moyennes pondérées $\int f\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, plutôt qu'aux valeurs ponctuelles de f. On étend certaines opérations par dualité.

Def 48 : Une distribution T sur I est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(I)$, continue au sens suivant :

Pour tout compact $K \subset I$, il existe $n_K \in \mathbb{N}$, $C_K > 0$ tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I),\ \operatorname{supp}\varphi \subset K \Rightarrow |\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K \max_{0 \leq i \leq n_K} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$$

L'ordre de T est l'entier minimal (éventuellt infini) convenant pour tout K. On note $\mathcal{D}'(I)$ l'espace des distributions sur I.

Ex 49 : (i) Si $f \in L^1_{loc}(I)$, alors $T_f : \begin{array}{l} \mathcal{D}(I) \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\varphi \end{array}$ est une distribution sur I, d'ordre 0. De plus, $f \mapsto T_f$ est injective.

(ii) La mesure de Dirac en 0 définit une distribution d'ordre 0

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

(iii) $T : \varphi \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n)$ est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d'ordre infini.

Def 50 : La dérivée de $T \in \mathcal{D}'(I)$ est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I),\ \langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle$$

Rq 51 : Si $f \in \mathcal{C}^1(I)$, alors $(T_f)' = T_{f'}$

Ex 52 : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}|x| \end{array}$. Alors $f'' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Def 53 : Une suite $(T_n) \in \mathcal{D}'(I)^{\mathbb{N}}$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(I)$ si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad (n \to +\infty)$$

Ex 54 :
- $\sin(nx) \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- $T_n := \frac{n}{2}\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$. T_n converge vers $-\delta_0' : \varphi \mapsto \varphi'(0)$

Prop 55 : Si $T' = 0$ alors T est une distribution constante

Thm 56 : (Rademacher)

$f : I \to \mathbb{R}$ fonction

f est lipschitzienne $\Leftrightarrow \exists g \in L^\infty(I),\ \forall x, y \in I,\ f(x) - f(y) = \int_y^x g(t)\,dt$

Csq 57 : Une fonction lipschitzienne est dérivable presque partout.

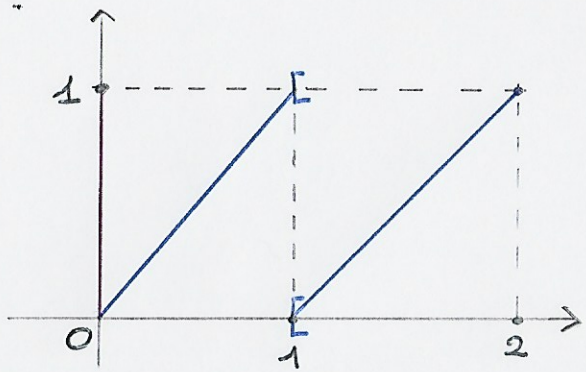

Fig1 : Contre-exemple TVI

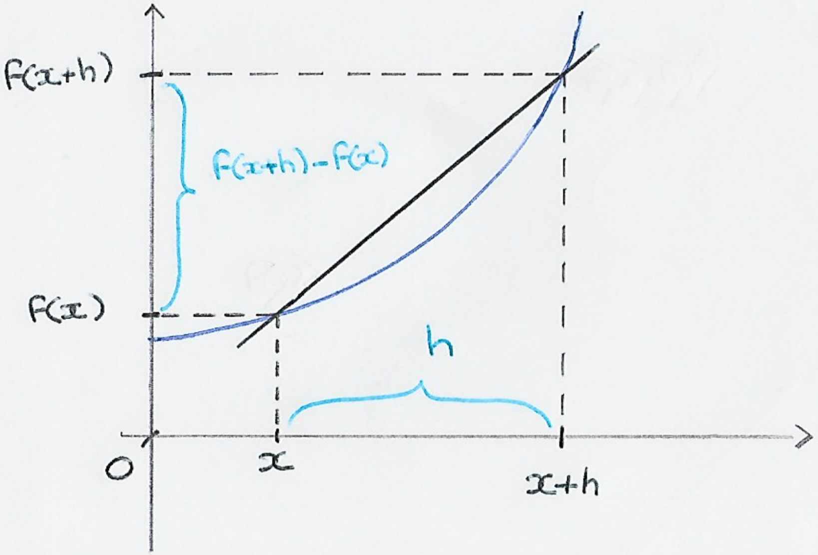

Fig2 : Taux d'accroissement et dérivé.

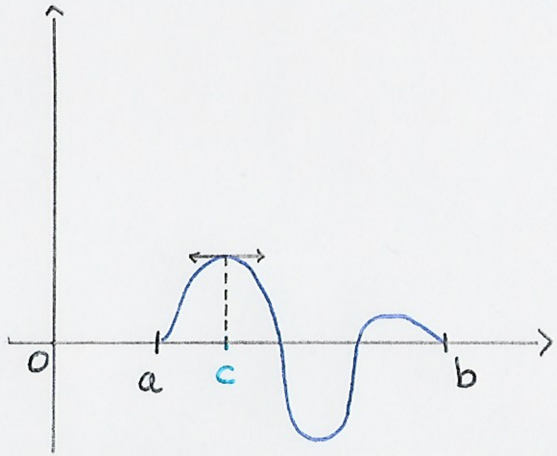

Fig3 : Rolle

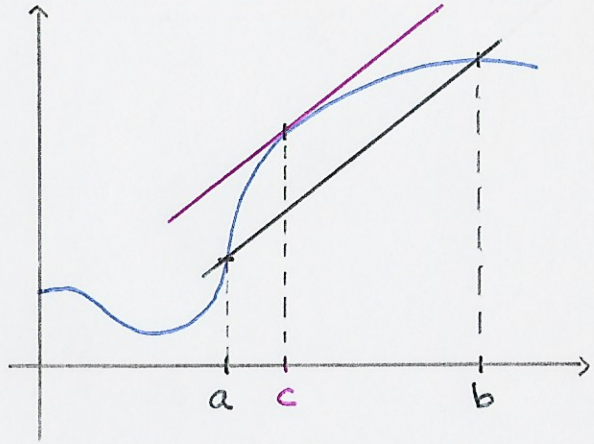

Fig4 : Accroissements finis

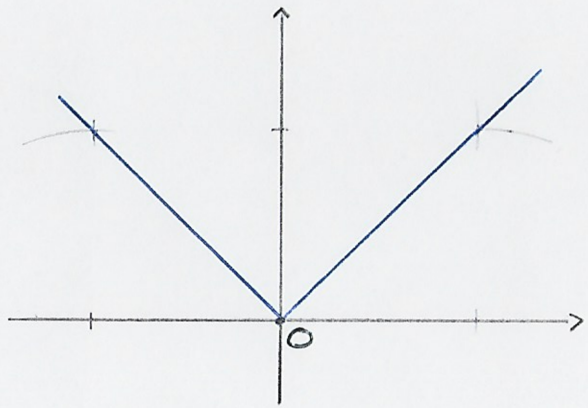

Fig5 : Graphe $x \longmapsto |x|$

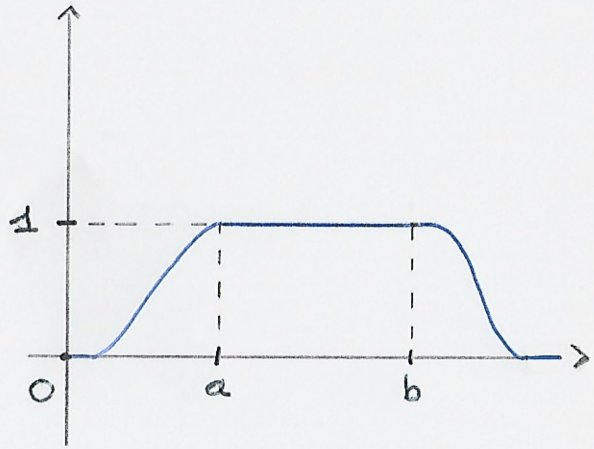

Fig6 : Fonction plateau