228

Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle.

Dans toute la suite f est une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$

I Définitions et exemples

A) Les différentes continuités

Déf 1 : f est continue en a ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]a-\delta ; a+\delta[\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Si f est continue sur tout point de I, on dit que f est continue sur I et on note $f \in \mathcal{C}^0(I)$

Prop 2 : La somme, le produit, le quotient* et la composée* de fonctions continues est continue (* : bonne hypothèse sur les fonctions)

Ex 3 : Les polynômes, cos, sin, expo, … sont des fonctions continues

Déf 4 : f est uniformément continue sur I ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in I^2 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

prop 5 : continuité uniforme $\Rightarrow$ continuité

Ex 6 : • $\sqrt{x}$ est uniformément continue
• x^2 n'est pas uniformément continue.

Thm 7 : (Heine) : Si I est compact ; continuité $\Rightarrow$ ~~unif~~ continuité uniforme.

déf 8 : f est k-Lipshitzienne sur I ssi $\exists k \geq 0$, tq $\forall (x,y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$

prop 9 : Lipshitzienne $\Rightarrow$ continuité uniforme

ex 10 : Les fonctions constante sont 0-Lipshit
$\sqrt{x}$ n'est pas Lipshitzienne.

B) Encore plus de régularité : Dérivabilité

Déf 11 : f est dérivable en a ssi $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est fini et on note alors $f'(a)$ cette limite.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Prop 12 : (opération sur les fonctions dérivable)
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a, on a alors :
$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$; $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
si $g(a) \neq 0$: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$; $f(g(a)) = g'(a) \times f'(g(a))$

Ex 13 : les polynômes, cos, sin, … sont dérivable

Rq 14 : On déduit de la formule du produit celle de l'IPP pour les fonctions intégrable.

Prop 15 : dérivable $\Rightarrow$ continue

c-ex 16 : $|x|$ est continue mais non dérivable en 0

prop 17 : f' bornée $\Leftrightarrow$ f Lipshitzienne et dérivable

prop 18 : monotone $\Rightarrow$ dérivable p.p.

déf 19 : On définit par récurrence les dérivés $k$ième par $f^{(0)} \equiv f$ et $f^{(k+1)} \equiv (f^{(k)})'$.

déf 20 : f est convexe sur I si $\forall (x,y) \in I^2$ et $\forall t \in [0;1]$: $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

prop 21 : $f'' > 0 \Rightarrow f$ convexe

prop 22 : convexe $\Rightarrow$ continue si I ouvert.

II Des outils de l'analyse réelle

A) Aspect topologique

a) Préservation de structure

Thm 23 : (TVI) : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Thm 24 (Darboux) : Si f est dérivable alors l'image par f' d'un intervalle est un intervalle.

Thm 25 (Borne atteinte) : Si f est continue alors l'image par f d'un compact est un compact.

prop 26 : Soit $(U_n)_n$ tel que $\lim_{n\to+\infty} U_n = a$ alors f continue en a $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(\lim U_n) = f(a)$.

b) Suite de fonctions.

Déf 27 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur I, on dit que ~~que~~ la suite $(f_n)_n$ converge uniformément s'il existe f telle que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Ex 28 : $f_n(x) = x^n$ C.U. sur $[0;1[$ mais pas sur $[0,1]$

Thm 29 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $I \to \mathbb{R}$ et soit $a \in I$ tel que :
1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a
2) $(f_n)_n$ converge uniformément vers f

Alors f est continue en a

Thm 30 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $I \to \mathbb{R}$ tq
1) $\forall n$, f_n est dérivable sur I.
2) la suite (f_n') converge uniformément sur tout compact de I et on note g la limite de (f_n') sur I
3) $\exists x_0 \in I$ tq $(f_n(x_0))_n$ converge.

Alors ~~il existe~~ a) $(f_n)_n$ converge unif sur tout compact de I, on note f la limite de $(f_n)_n$ sur I.
b) f est dérivable sur I et on a $f' = g$.

B) Résolution d'équation.

Thm 31 (Reformulation du TVI)
Pour toute application continue $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ et tout réel γ entre f(a) et f(b), il existe au moins un $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Rq 32 : La propriété de la valeur intermédiaire n'est pas équivalente à la continuité : $\begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas continue et satisfait le TVI

Application 33 (Île mystérieuse) Soit A une île (connexe et compact) et $B \subset A$ un lac (connexe). Existe-t-il une droite D qui coupe à la fois l'île et le lac en deux partie égale. (au sens des aires). DEV 1

Thm 34 (point fixe de Banach)
Soit f K-contractante (K-lipshitzienne avec $K \in [0;1[$) de I dans I alors il existe un point fixe x^* de f. De plus toute suite dans I tq $x_{n+1} = f(x_n)$ vérifie $|x_n - x^*| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_0 - x_1|$.

Thm 35 (Rolle) : Soient $a < b \in I$ et une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ ~~telle que~~ Si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Coro 36 (TAF) : Sous les mêmes hypothèse : $\exists c \in]a;b[$ tq $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

C) Etude de fonction.

Thm 37 : Soit f dérivable sur I, f est :
- croissante ssi $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$
- décroissante ssi $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$
- constante ssi $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.

• strictement croissante (Resp décroissante) ssi f est croissante (Resp décroissante) et si l'ensemble des points où la dérivée f' s'annule est d'intérieur vide.

Ex 38 : $x \mapsto x + \cos x$ est strictement croissante

DEV2 Rq 39 : Il existe une fonction f continue et croissante sur $[0;1]$ tq $f(0)=0$ et $f(1)=1$ avec $f' \equiv 0$ p.p.

déf 40 : On dit que f admet un minimum (Resp maximum) local en a si $\exists \varepsilon > 0 \,/\, \forall x \in]a-\varepsilon ; a+\varepsilon[$ on a $f(x) \geq f(a)$ (Resp $f(x) \leq f(a)$)

prop 41 : Si a est un extremum de f alors $f'(a) = 0$.

c-ex 42 : la réciproque est fausse $x \mapsto x^3$

Prop 43 : Si f est convexe et admet un minimum local en a alors elle admet un minimum global en a.

Thm 44 : (développement de Taylor)

TY : $f \in \mathcal{C}^k([a-h;a+h])$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(k)}(a)h^k}{k!} + o(h^k)$$

TL : $f \in \mathcal{C}^k(]a;b[) \cap \mathcal{C}^{k-1}([a;b])$ alors $\exists c \in [a;b]$ tq

$$f(b) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(b-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(k)}(c)(b-a)^k}{k!}$$

TRI : $f \in \mathcal{C}^{k+1}([a;b])$ alors : $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt$

III Passage à la dérivée faible

motivation : C'est l'extension de la notion de dérivation usuelle pour des fonctions assez régulière mais non dérivable (Idée : faire une "IPP")

Déf 45 : On note $\mathcal{D}(I) = \mathcal{C}_c^\infty(I)$ et on appelle distribut° une forme linéaire vérifiant : $\forall$ Compact K de I $\exists C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$ on a :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{\alpha \leq p_K} \sup_{x \in K} |\varphi^{(\alpha)}(x)|$$

prop 46 : Toutes fonctions localements intégrable définit une distribution T_f tel que $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_I f(t)\varphi(t)\,dt$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, on pourra confondre T_f et f.

Ex 48 : $T = \delta_0$ tq $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$ définit une distrib.

prop 49 : $\forall (T_n) \in \mathcal{D}'(I)^{\mathbb{N}}$ et $\forall (\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(I)^{\mathbb{N}}$ tq $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ et $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ alors on a $\langle T_n, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

Déf 50 : On définit la dérivée faible de $T \in \mathcal{D}'(I)$ par $\langle dT, \varphi \rangle = -\langle T, d\varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$

Ex 51 : Soit $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $dH = \delta_0$.

Rq 52 : Si $f \in \mathcal{C}^1$, $dT_f = T_{f'} = f' = -\int_I f(x)\varphi'(x)\,dx$ donc la dérivée et la dérivée faible coïncident.

Thm 53 : Soit f $\mathcal{C}^1$ par morceaux et soit $(a_i)_{i \in I}$ les points de discontinuité de f, alors :

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i \in I} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}$$ avec $f(a_i^-)$ (Resp $f(a_i^+)$) la limite à gauche (Resp à droite).

Rq 54 : $T' \equiv 0 \Rightarrow T$ constante.

App 55 : résolution de l'EDP : $xT' + T = 0$.

- Cours d'analyse fonctionnelle - Daniel Li
- Cours d'analyse - Jean-Michel Bony
- Mathématiques - Jean-Pierre Ramis.

Dvlpmt ① : Analyse mathématique - F. Testard.

Dvlpmt ② : Théorie de l'intégration - Briane, Pagès.