228

Continuité et dérivabilité d'une fonction réelle d'une variable réelle. Exemples et applications.

I. Définitions, premières propriétés et exemples.

Cadre : I désigne un ensemble de $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

I.1. Continuité [ROM]

Def 1 : f est continue au point a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, i.e. pour tout voisinage U de $f(a)$, il existe un voisinage V de a tel que $f(V) \subset U$.

Rem 2 : f est continue au point a ssi f admet un DL d'ordre 0 en a.

Def 3 : f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Thm 4 : (caractérisation séquentielle) Une fonction f est continue en a ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Appli 5 : Montrer la discontinuité d'une fonction en a.
ex : $f : x \longmapsto \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0.
On pose $x_n = \frac{1}{n\pi}$ pour $n \geq 1$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\forall n$, $f(x_n) = (-1)^n$ diverge.

Thm 6 : Soient f, g deux fonctions continues en a :
* $|f|$, $f+g$, fg, $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont des fonctions continues en a.
* si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f(x)}$ est continue en a.

Thm 7 : Si f est continue en a, J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $f(a)$ et $g : J \to \mathbb{R}$ continue en $f(a)$, alors $g\circ f$ est continue en a.

Ex 8 : Les polynômes, les fonctions trigonométriques et leurs réciproques, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques sont continues sur leur domaines de définition.

Rem 9 : La réciproque d'une fonction continue n'est pas toujours continue.
ex : [HAL] La bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

Def 10 : f est uniformément continue si :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

Contre-ex 11 : $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.

Appli 12 : Si f est une fonction lipschitzienne, alors f est uniformément continue.

Thm 13 : (Heine) Si I est un compact de $\mathbb{R}$ et f est continue sur I, alors f est uniformément continue sur I. [GOU]

I.2. Dérivabilité et lien avec la continuité.

Def 14 : f est dérivable en a si $\lim_{\substack{x\to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. On la note $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a. [GOU]

Rem 15 : f est dérivable en a ssi f admet un DL d'ordre 1 en a. [ROM]

Prop 16 : Si f est dérivable en a alors f est continue en a. [GOU]

Prop 17 : L'ensemble des fonctions continues sur $[0;1]$ nulle part dérivable est dense dans les fonctions continuement dérivables sur $[0,1]$. [GOU] DEV

Def 18 : Sur l'ensemble des points où f est dérivable, on peut définir $x \mapsto f'(x)$ la fonction dérivée de f. [GOU]

Rem 19 : Une fonction dérivée n'est pas nécessairement continue. [GOU]
ex : $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais f' n'est pas continue en 0.

Appli 20 : f dérivable sur I, f lipschitzienne ssi f' bornée. [ROM]

Prop 21 : Soient f, g deux fonctions dérivables en a. Alors : [ALL]
* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, αf est dérivable en a : $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
* $f+g$ est dérivable en a : $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
* fg est dérivable en a : $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
* si $g(a) \neq 0$, on a $\frac{f}{g}$ dérivable en a : $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Prop 22 : Soit $g : J \subset \mathbb{R} \to I$ dérivable en a et f dérivable en $f(a)$, alors $f\circ g$ est dérivable en a : $(f\circ g)'(a) = g'(a)\, f'(g(a))$. [ALL]

Prop 23 : f continue, strictement monotone et dérivable en a. La réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$. [ROM]

Ex 24 : $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $x \in]-1;1[$. [ROM]

Appli 25 : $\langle \delta_a', \varphi \rangle = -\langle \delta_a, \varphi' \rangle = -\varphi'(a)$. [LI]

I.3 - Dérivabilité d'ordre supérieure. [ROM]

Def 26: On note $f^{(0)} = f$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est définie et dérivable, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

[HAU] Rem 27: $x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Def 28: f est de classe C^n, pour $n \in \mathbb{N}$, sur I si elle est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I. Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k$, alors $f \in C^\infty$.

Ex 29: Les fonctions polynômes sont C^∞.

Prop 30: (Formule de Leibniz) Si $f,g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables alors fg est n fois dérivable et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Appli 31: (Multiplication d'une distribution). Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C_c^\infty$ (à support compact), on définit $fT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, en posant : $\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ [LI]

II - Résultats et applications historiques.

Cadre : $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a;b[$ avec $a \neq b \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$.

II.1 - Lien entre continuité et dérivabilité.

[ROM] Thm 32 : (valeurs intermédiaires) Si f est continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle.

[HAU] Contre-ex 33 : $x \mapsto \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ vérifie le TVI mais n'est pas continue en 0.

[ALL] Thm 34 : $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Alors $\exists x \in [a,b]$ tq $f(x) = x$.

[ROM] Thm 35 : (Darboux) Si f est dérivable alors f' vérifie le TVI.

Appli 36 : Recherche de racines par dichotomie.

II.2 - Interprétation géométrique de la dérivée.

[ALL] Thm 37 : (Rolle) Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$

Contre-ex 38 : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{array}$ ne vérifie pas le théorème de Rolle.

[ROM] Thm 39 : (accroissement finis) $\exists c \in]a;b[$ tq $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Thm 40 : (Règle de l'Hospital) Si $f(a) = g(a) = 0$ et si $\ell = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. [GOU]

Ex 41 : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Contre-ex 42 : $f : \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x^2) \end{array}$ $\quad g : \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$

II.3 - La dérivée comme outils pour étudier le comportement des fonctions.

Prop 43 : f est • croissante ssi $f' \geq 0$ sur $]a;b[$. [GOU]
• décroissante ssi $f' \leq 0$ sur $]a;b[$.

Prop 44 : Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.

Contre-ex 45 : $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante et $f'(0) = 0$.

Appli 46 : f dérivable. f convexe ssi f' croissante sur I. [ROM]

Prop 47 : La dérivée d'une fonction monotone est continue. [ALL]

Prop 48 : Si a extremum local de f, continue et dérivable, alors $f'(a) = 0$. [ROM]

Contre-ex 49 : $f : x \mapsto x^3$, f' s'annule en 0 qui n'est pas un extrema [ROM]

Appli 50 : (Méthode de Newton). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $\alpha \in \mathring{I}$ tq $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$. Il existe un réel $\eta > 0$ tq pour tout $x_0 \in [\alpha - \eta ; \alpha + \eta]$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers α. [ROM]

II.4 - Formules de Taylor. [ROM]

Thm 51 : (Formule de Taylor-Lagrange) Si $f \in C^n$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors $\exists c \in]a,b[$ tel que :
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Thm 52 : (Formule de Taylor-Young) Si $\alpha \in \mathring{I}$ et f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$, alors f admet un DL à l'ordre n au voisinage de α :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Appli 53 : (Théorème central limite). Soient (X_n) des variables aléatoires réelles i.i.d. avec $\mathbb{E}[|X_i|^2] < \infty$
$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_i]\right) \xrightarrow[n \to \infty]{Loi} \mathcal{N}(0, \mathrm{var}(X_i))$$ [Z-Q]

Appli 54 : (Inégalité de Kolmogorov). Si $f \in \mathcal{C}^2$, f et f'' bornées, alors f' est bornée sur $\mathbb{R}$: $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$.

Prop 55 : Si $f \in \mathcal{C}^1$, alors $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.

Thm 56 : (Formule de Taylor avec reste intégrale). Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,dt$$

II.5 - Comportement à la limite : prolongements [ROH]

Thm 57 : (prolongement continu) Soit f continue, $\alpha \in \overset{\circ}{I}$, $\alpha \notin I$. Si f admet une limite ℓ en α, alors il existe un unique prolongement de f à $I \cup \{\alpha\}$ qui est continu en α, il est défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $\tilde{f}(\alpha) = \ell$.

Ex 58 : $f : x \mapsto \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Contre-ex 59 : $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ ne se prolonge pas par continuité en 0.

[LI] Appli 60 : (valeur principale) Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la limite $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ existe, et définit une distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$, appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$ et notée $vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Thm 61 : f dérivable sur $]a;b[\setminus \{c\}$ avec $c \in]a;b[$. Si f' admet une limite ℓ en c, alors f est dérivable en c et $f'(c) = \ell$.

Ex 62 : $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$

III - De l'analyse poussée avec ces notions de base.

III.1 - Suites et séries de fonctions. [GOU]

Thm 63 : Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues en x_0 tq $f_n \xrightarrow{CVU} f$, alors f est continue en x_0.

Contre-ex 64 : $f_n : x \mapsto x^n$ est continue sur $[0;1]$ et converge simplement vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ qui est non continue en 1.

Rem 65 : On a le même résultat pour les séries de fonctions.

Thm 66 : (Théorèmes de Dini).
* $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues sur $I = [a, b]$.
* $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes et continues sur $I = [a; b]$

Si $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors elle converge uniformément.

Thm 67 : (Bernstein) Toute fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue est limite uniforme d'une suite de polynômes.

DEV

III.2 - Résultats de densité. [L3-analyse]

Thm 68 : L'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, pour $1 \leq p < \infty$

Thm 69 : L'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, pour $1 \leq p < \infty$.

Thm 70 : L'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, pour $1 \leq p < \infty$.

III.3 - Equicontinuité [Z-Q]

Def 71 : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle fermé, borné. $\mathcal{A}$ est équicontinue si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I \quad |x - y| < \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{A}, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Ex 72 : Les fonctions lipschitziennes de même constante sont équicontinues.

Thm 73 : (Ascoli) Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ où I fermé, borné. Alors $\mathcal{A}$ est équicontinue et bornée pour $\|\cdot\|_\infty$ ssi $\mathcal{A}$ est relativement compact (pour $\|\cdot\|_\infty$).

Appli 74 : (Théorème de Angelo-Peano) Soit a, b réels positifs et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On définit
$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq a \text{ et } |x - x_0| \leq b\}$.
Soit f continue sur Q et $M > 0$ tel que $\sup_Q |f| < M$. Alors le problème : $\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une solution (x, J) où $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ avec $T = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Cette solution n'est pas forcément unique.

Références :

[ALL] : Kada ALLAB, Eléments d'analyse, Ellipse.

[GOU] : Xavier GOURDIN, Analyse, Ellipse.

[HAU] : Bertrand HAUCHECORNE, Les contre-exemples en mathématiques, Ellipse 2ème édition.

[L3-analyse] : Mathématiques L3, Pearson Education édition 2003.

[LI] : Daniel LI, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipse.

[ROM] : Jean-Etienne ROMBALDI, Eléments d'analyse réelle, EDP science.

[Z-Q] : Zuily-Queffelec, Analyse pour l'agrégation, Dunod

Items qui auraient pû être ajoutés à la leçon.

* Une fonction continue en a est bornée en son voisinage.
* Une fonction monotone continue $\Leftrightarrow f(I)$ intervalle.
* Une fonction monotone est dérivable p.p.
* f convexe dérivable $\Rightarrow f \in C^1(I, \mathbb{R})$
* f convexe sur I $\Rightarrow$ continue sur $\mathring{I}$, dérivée droite et gauche.
* Définition d'une dérivée à droite et à gauche.
* Une fonction lipschitzienne est dérivable p.p.
* Théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe de l'intégrale.
* Partie entière d'une distribution comme appli du théorème des accroissement fini.
* Problème de Dirichlet de l'équation de Poisson posé dans le demi-espace (trouver les solutions faible avec Fourier, les solutions fortes par les distributions et Ascoli implique la compacité de l'opérateur résolvant) $\rightarrow$ peut faire un DEV.
* Fonction α-Holderienne
* ...