222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires

I/ Equations de transport et de propagation

1) Equations de transport

Déf 1: Une équation de transport est une équation de la forme $\partial_t u + v(x,t)\partial_x u = f(x,t)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'elle est homogène si $f \equiv 0$.

Rmq 2: (Méthode des caractéristiques) L'idée consiste à chercher une courbe caractéristique $(t(s), x(s))$ le long de laquelle cette équation aux dérivées partielles du premier ordre se réduirait à une équation différentielle ordinaire.

Exemple 3: Le problème est le suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \ c \text{ constante} \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La solution de ce problème est
$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $u(t,x) = u_0(x - ct)$

Rmq 4: Si l'on considère une courbe caractéristique $\xi(t)$ nous permettant de simplifier le problème, de plus si u est solution de $\partial_t u + v(x,t)\partial_x u = 0$ pour $t > 0$ et $u_{|t=0} = u_0$, $\xi(t)$ est solution de

$$\begin{cases} \xi'(t) = v(\xi(t), t) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases}$$

alors $\partial_t (u(\xi(t),t)) = \partial_t u(\xi(t),t) + v(x,t)\partial_x u(\xi(t),t) = 0$

donc $u(\xi(t),t) = u(\xi(0),0) = u_0(\xi_0)$

Appl. 5: Le problème est le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{x}{t^2+1}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La solution de ce problème est
$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $u(t,x) = u_0(\xi_0)$
avec $\xi_0 = \dfrac{x}{\exp(\arctan(t))}$

$\boxed{\text{Dev 1}}$

2) Equation des ondes

En dimension 1, l'équation des ondes est

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times]0,+\infty[\\ u = g \ \text{ et } \partial_t u = h & \text{sur } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases}$$

Rmq 6: $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ se factorise en deux termes de transport : $\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial t - \partial x)(\partial t + \partial x)$

En posant $v(x,t) = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$, on a $\partial_t v + \partial_x v = 0$

donc $v(x,t) = a(x-t)$ avec $a = v(x,0)$

Puis $\partial_t u - \partial_x u = a(x-t)$

d'où $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy + \dfrac{1}{2}\big(g(x+t) + g(x-t)\big)$

Thm 7: Si $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $u(x,t)$ défini comme en Rmq 6, alors $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty[)$, $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ et $u(x,t) \to g(x_0)$, $\partial_t u(x,t) \to h(x_0)$ quand $(x,t) \to (x_0, 0)$

Rmq 8: u s'écrit $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$ pour F, G convenable et réciproquement, toute fonction de cette forme est solution de $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$. C'est une conséquence de la factorisation $\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)$

II/ Equation de la chaleur et série de Fourier

Rappel 9: Quelques rappels sur les séries de Fourier

a) Soit f une fonction 2π-périodique, continue

$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ sont les coefficients de la série de Fourier

b) $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$

c) $S_N(f)(x) = \sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$

$S(f)(x) = \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x)$ est la série de Fourier de f

Notation 10 : $C := \{f$ fonction continue, 2π-périodique$\}$

$A := \{f \in C, S_N(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}\}$

Thm 11 : Soit $f \in C$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $f \in A$ et $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Problème 12 : Considérons une barre métallique. Connaissant à l'instant initial, la température en chaque point de la barre et, à tout instant, la température aux extrémités, peut-on déterminer, à tout moment et en tout point la température de la barre ?

Prop 13 : Nous allons modéliser le problème précédent dans un cas simple. On peut supposer que le segment $[0,L]$ est la barre. Notons $Q =]0,L[\times]0,+\infty[$

$\bar{Q} = [0,L] \times [0,+\infty[$

Le problème à résoudre est le suivant : trouver une fonction u telle que,

$u \in \mathcal{C}^0(\bar{Q})$, $u \in \mathcal{C}^2(Q)$ (1)

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dans Q (2)

$u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t \in [0,+\infty[$ (3)

$u(x,0) = h(x)$, $x \in [0,L]$ (4)

où u est la température en fonction du temps t et du point x sur la barre

h est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle fermé $[0,L]$ telle que $h(0) = h(L) = 0$

La série de Fourier de h sera alors normalement convergente.

Lemme 14 : On a une famille de solutions de la forme $u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}$

Or ces solutions n'ont aucune raison de satisfaire (4).

Rmq 15 : $h(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n\log(n)}$ est continue 2π-périodique et $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle semi-ouvert $]0,\pi]$, mais sa série de Fourier n'est pas normalement convergente.

Prop 16 : Une solution du problème est $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}$, $u \in \mathcal{C}^0(\bar{Q})$, $u \in \mathcal{C}^\infty(Q)$

avec $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < +\infty$

Dev 2

Prop 17 : (admis) Il n'y a pas d'autre fonction que celle définie en prop 16 qui vérifie les points (1), (2), (3), (4) de la prop 13.

Rmq 18 : La méthode utilisée pour l'équation de la chaleur est utile dans d'autres cas comme celui de l'équation des ondes ou l'équation de Laplace.

III/ Fonctions harmoniques

Notation 19 : On définit l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ par $H(\Omega)$

Déf 20 : Dans $\mathbb{C}$, on définit les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ de la manière suivante :

$\partial := \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\bar\partial := \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

où $z = x+iy$

Thm 21 : Soit f une fonction complexe sur Ω qui possède une différentielle en tout point de Ω. La fonction $f \in H(\Omega)$ ssi $(\bar\partial f)(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$ ⊛

on a aussi $f'(z) = (\partial f)(z)$

Lorsque $f = u + iv$, où u et v sont des fonctions réelles, ⊛ fournit deux équations $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemann

Déf 22 : Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω du plan et à valeurs complexes, tq $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent en chaque point de Ω. Le laplacien de f est continue sur Ω et si en chaque point de Ω on a $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

On dit que f est harmonique sur Ω.

Rmq 23 : La relation $\Delta f = 0$, est nommée équation de Laplace.

Prop 24 : Si f possède des dérivées partielles d'ordres 2 continues, alors $\Delta f = 4\partial\bar\partial f = 4\bar\partial\partial f$

Thm 25 : Les fonctions holomorphes sont harmoniques

Corollaire 26 : Si f est harmoniques alors, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont harmoniques. En particulier la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe est harmonique.

Déf 27 : On dit qu'une fonction continue u sur l'ouvert U a la propriété de la moyenne si à tout $z \in U$ correspond une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $r_n > 0$, $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z + r_n e^{it})\, dt$$

Prop 28 : On peut aussi l'écrire autrement, si u est $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U un ouvert, alors pour toute boule $B(x,r) \subset U$, on a $u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u\, ds = \int_{B(x,r)} u\, dy$

Thm 29 : Réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^2(U)$ vérifie la prop. 28, alors elle est harmonique.

Prop 30 : (Principe du maximum) Si $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}^0(\bar U)$ est harmonique sur U, alors $\max_{\bar U} u = \max_{\partial U} u$

et si U est connexe et qu'on a $x_0 \in U$ tq $u(x_0) = \max_{\bar U} u$ alors u est constante sur U.

Déf 31 : ... de Poisson est définie de la manière suivante : $u \in \mathcal{C}^2(U)$, $f \in \mathcal{C}^0(U)$, où U est un ouvert.

$-\Delta u = f$ sur U

Corollaire 32 : (Corollaire de la prop 30) Si $f \in \mathcal{C}^0(U)$ $g \in C^0(\partial U)$ alors il existe au plus une solution $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}^0(\bar U)$ de $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } U \\ u = g & \text{sur } \partial U \end{cases}$

Références : Rudin, Analyse réelle et complexe

David, Gosselet Equations aux dérivées partielles

Z-Q, L'analyse pour l'agregation

Rouvière, Petit guide de calcul différentiel

Gourdon, Analyse