222

Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

I- Introduction

1. Définitions et premiers exemples

Déf 1 : On appelle équation aux dérivées partielles linéaires (EDPL) toute équation de la forme $\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f(x)$ $(*)$ d'inconnue $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $k \in \mathbb{N}$ et où f et les $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq k}$ sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ données.
- L'entier k s'appelle l'ordre de l'EDPL $(*)$
- Si $f \equiv 0$, on dit que l'EDPL $(*)$ est homogène.

Rq 2 : Dans ce qui suit, on aura $k \leq 2$.

Ex 3 :
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x} = 0$ (équation des télégraphes)
- $\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a^{ij} u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b^i u) = 0$

(équation de Fokker-Planck).

2. Problèmes bien posés

Déf 4 : On appelle problème bien posé un problème qui admet une unique solution stable par rapport aux données du problème.

C-ex 5 : Le problème $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) \end{cases}$

est mal posé car si $u_{0,k}(x) = \frac{\cos(kx)}{k^2}$ alors la solution est $u_k(t,x) = e^{k^2 t}\frac{\cos(kx)}{k^2}$ mais $u_{0,k} \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} 0$ et $u_k(t,0) \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} +\infty$ pour $t>0$.

Ex 6 : On considère l'équation $-u'' = f$ sur $]0,1[$ avec $f \in C([0,1])$. Alors dans chacun des cas suivants, il existe une unique solution de la forme $u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)dy$

Condition	Dirichlet $u(0)=u(1)=0$	Neuman $u'(0)=u'(1)=\int_0^1 f = 0$
G	$G(x,y)=\begin{cases} y(1-x) \text{ si } 0\leq y\leq x\leq 1 \\ x(1-y) \text{ si } 0\leq x\leq y\leq 1\end{cases}$	$G(x,y)=\begin{cases} y-x & \text{si } y\leq x \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

3. Premières résolutions

Ex 7 : Pour résoudre $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$ sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<y\}$, on effectue le changement de variables $\begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases}$.

Ex 8 : De même, on effectue le changement de variables $\begin{cases} x = ue^{v} \\ y = e^{-v} \end{cases}$ on résout $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

II - Équations de transport et équations des ondes

1. Équations de transport et méthode des caractéristiques

Déf 9 : On appelle équation de transport une équation de la forme
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a(t,x)\cdot\nabla_x u(t,x) + b(t,x)u(t,x) = f(t,x) \quad (T)$$
d'inconnue $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Rq 10 : Pour résoudre ce type d'équation, on utilise la méthode des caractéristiques qui consiste à regarder la solution le long des lignes de flot de l'équation $y' = a(t,y)$.

Th 11 : On suppose a de classe C^1 et globalement lipschitzienne. On suppose b et f de classe C^1. Alors il existe une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ de (T) avec la condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$ où $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$.
Son expression est $u(t,x) = u_0(X(0,t,x))\exp\left(\int_0^t b(s,X(s,t,x))ds\right)$
$$+ \int_0^t f(s,X(s,t,x))\exp\left(\int_s^t b(\sigma,X(\sigma,t,x))d\sigma\right)ds$$
où $X(t,0,x)$ est le flot de $y' = a(t,y)$.

Cor 12 : Soient $f \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Le problème
$$(T')\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f & (c\in\mathbb{R}) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$
admet une unique solution donnée par
$u(t,x) = u_0(x-ct) + \int_0^t f(s, x-c(t-s))ds$ (formule de Duhamel).

Prop 13 :
- Si $u_0 \in C^k(\mathbb{R})$ et $f \in C^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, alors $u \in C^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.
- Si u_0 est à support compact, alors $\forall t$, $x \longmapsto u(t,x)$ est à support compact (si $f\equiv 0$).
- Si $u_0 \geq 0$ et $f \geq 0$ alors $u \geq 0$.

2. Équations des ondes

Déf 14 : On appelle équation des ondes une équation de la forme
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (W)$$
d'inconnue $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Th 15 : Soient $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ et $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Alors le problème (W) avec conditions initiales $u(0,x) = u_0(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x)$ admet une unique solution donnée par
$$u(t,x) = \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds$$
(formule de d'Alembert).

Rq 16 : • La solution donnée par la formule de d'Alembert est la somme de deux ondes progressives de vitesses respectives c et $-c$: $u(t,x) = u_+(x-ct) + u_-(x+ct)$

$$\text{où } u_+(y) = \frac{1}{2}u_0(y) - \frac{1}{2c}\int_0^y u_1(z)\,dz$$

$$\text{et } u_-(y) = \frac{1}{2}u_0(y) + \frac{1}{2c}\int_0^y u_1(z)\,dz$$

• L'équation (W) est réversible en temps, i.e. si $u(t,x)$ est solution alors $u(-t,x)$ aussi.

• La solution au point (t_0,x_0) ne dépend que des conditions initiales dans l'intervalle $[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$. En particulier, si $u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ sur $[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$ alors $u \equiv 0$ sur

$$C = \{(t,x),\ 0 \leq t \leq t_0 \text{ et } |x-x_0| \leq t_0 - t\}.\ \text{(cf annexe)}$$

III - Résolution par analyse de Fourier

1. Équation de la chaleur sur le tore

Prop 17 : Soit $f \in C^1(\mathbb{T})$, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{T}$ et sa somme vaut f.

DEV1

Th 18 : Soit $f \in C(\mathbb{T})$. Alors il existe une unique $u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T})$ telle que $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ et $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} f$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Th 19 : Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors il existe une unique $u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T})$ telle que $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ et $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} f$ pour $\|\cdot\|_{L^2}$.

2. Rappels sur l'espace de Schwartz

Déf 20 : On appelle espace de Schwartz et on note $S(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d,\quad \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < +\infty.$$

Rq 21 : $S(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel. Muni des semi-normes $p_{\alpha,\beta}(u) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta u(x)|$, $S(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Fréchet.

Ex 22 : $x \longmapsto e^{-\|x\|^2} \in S(\mathbb{R}^d)$

Déf 23 : Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier par $\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix.\xi}\varphi(x)\,dx$ pour $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Ex 24 : Si $G_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$ avec $\alpha > 0$ alors $\mathcal{F}G_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\xi^2/4\alpha}$.

Prop 25 : L'application $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^d) \longrightarrow S(\mathbb{R}^d)$ est linéaire continue.

Th 26 (formule d'inversion) : Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\quad \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\xi}\,\mathcal{F}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Prop 27 : Soient $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^d)$. On a :

- $\mathcal{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = i\xi_j \mathcal{F}\varphi$
- $\mathcal{F}(x_j\varphi) = -i\frac{\partial \mathcal{F}\varphi}{\partial \xi_j}$
- $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}\varphi . \mathcal{F}\psi$.

3. Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

Th 28 : Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Il existe une unique fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ telle que :

- $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $t>0$, $x \in \mathbb{R}$
- $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} f$ pour $\|\cdot\|_\infty$
- $\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^j \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(t,x)\right| < +\infty$ pour $T>0$ et $j,l \in \mathbb{N}$.

De plus, u est donnée par $u(t,x) = (H_t * f)(x)$ où $H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t}$.

4. Équation de Schrödinger

Th 29 : Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Il existe une unique fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ telle que :

- $\frac{\partial u}{\partial t} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $t,x \in \mathbb{R}$
- $u(0,\cdot) = f$
- $\sup_{t\in[-T,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^j \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(t,x)\right| < +\infty$ pour $T>0$ et $j,l \in \mathbb{N}$.

De plus, u est donnée par $u(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{4i\pi t}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}} \cdot f(y)\,dy$

et on a conservation de la norme L^2 : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$.

IV. Problèmes elliptiques

1. Équation de Laplace et fonctions harmoniques

Déf 30 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $h : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si elle est de classe C^2 et si $\Delta h = 0$ sur Ω, où $\Delta h = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}$.

Th31 :
- Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont harmoniques sur Ω.
- Réciproquement, si $h : D(0,1) \to \mathbb{R}$ est harmonique alors il existe $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $h = \mathrm{Re}(f)$. De plus, f est unique à une constante additive près.

Cor32 : Si $h : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique alors elle est de classe C^∞.

Ex33 : $h(x,y) = e^x \cos y = \mathrm{Re}(e^{x+iy})$ est harmonique sur $\mathbb{C}$.

Prop34 : Si $h : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique et $D(w,\rho) \subset \Omega$, alors
$$h(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(w + re^{it})\,dt \quad \text{pour } r \in [0,\rho[.$$

Th35 (principe du maximum) : Soient $h : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique et $\overline{D(w,\rho)} \subset \Omega$. Si $h \leq 0$ sur $\partial D(w,\rho)$ alors $h \leq 0$ sur $D(w,\rho)$.

Déf36 : Soit $\varphi : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ continue. Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction $h : D(0,1) \to \mathbb{R}$ harmonique telle que
$$\forall \xi \in \partial D(0,1), \quad \lim_{\substack{z \to \xi \\ z \in D(0,1)}} h(z) = \varphi(\xi).$$

Th37 : Soit $\varphi : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ continue. Il existe une unique solution $h : D(0,1) \to \mathbb{R}$ au problème de Dirichlet. De plus h est donnée par
$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})\,d\theta \quad \text{où } P(z,\xi) = \mathrm{Re}\left(\frac{\xi + z}{\xi - z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2}$$
pour $z \in D(0,1)$ et $\xi \in \partial D(0,1)$.

2. Techniques hilbertiennes

Déf 38 : On définit l'espace de Sobolev $H^1(0,1)$ comme l'ensemble des $u \in L^2(0,1)$ telles que $u' \in L^2(0,1)$ où la dérivée est au sens des distributions.

Prop39 : On définit $\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_0^1 uv + \int_0^1 u'v'$, pour $u, v \in H^1(0,1)$. Alors $(H^1(0,1), \langle \cdot,\cdot\rangle_{H^1})$ est un espace de Hilbert séparable.

Th40 : Soit $u \in H^1(0,1)$, alors il existe une fonction $\tilde{u} \in C([0,1])$ telle que $u = \tilde{u}$ pp et $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,dt$ pour $x, y \in [0,1]$.

Déf 41 : On désigne par $H_0^1(0,1)$ la fermeture de $C_c^\infty(0,1)$ dans $H^1(0,1)$.

Th42 : Soit $u \in H^1(0,1)$. Alors $u \in H_0^1(0,1)$ ssi $u(0) = u(1) = 0$.

Prop43 (inégalité de Poincaré) : Il existe $C > 0$ telle que
$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2} \quad \text{pour } u \in H_0^1(0,1).$$
En particulier, $u \mapsto \|u'\|_{L^2}$ est une norme sur $H_0^1(0,1)$ équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$.

Th 44 (Lax-Milgram) : Soit H un Hilbert, et soit a une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que $a(u,v) = \varphi(v)$, $\forall v \in H$.

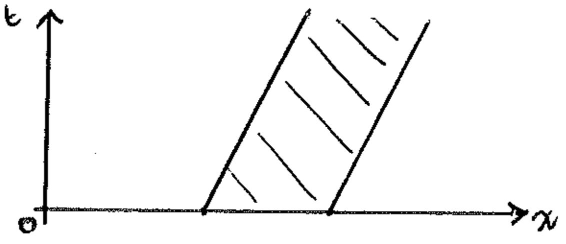
App45 : Soient $f \in L^2(0,1)$, $p \in C^1([0,1])$ et $q, r \in C([0,1])$ avec $p \geq \alpha > 0$, $q \geq 1$ et $r^2 \leq \alpha$. Le problème
$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$
admet une unique solution faible $u \in H_0^1(0,1)$.

DEV 2

Références :

- Evans - *Partial Differential Equations*.
- Dym, McKean - *Fourier Series and Integrals*. (chaleur sur le cercle)
- Stein, Shakarchi - *Fourier Analysis*. (chaleur sur $\mathbb{R}$)
- Brézis - *Analyse fonctionnelle*. (Sobolev)

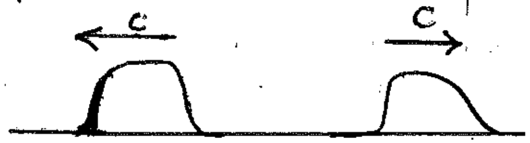
Propagation du support pour l'équation de transport :



$$\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$$

Équation des ondes :

- Superposition de deux ondes



- Cône de dépendance