214

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie

Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

I - Théorème d'inversion locale (TIL)

1) Enoncé et variantes

Théo 1 : (TIL) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^1$. On suppose que la matrice jacobienne $Df(a)$ est inversible (ie $\det(Df(a)) \neq 0$). Il existe alors un ouvert V contenant a tq $V \subset U$ et W un ouvert contenant $f(a)$ tels que $f_{|V}$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur $W = f(V)$.

Exemple 2 :
- La fonction $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféo local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- La fonction $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas inversible sur aucun voisinage de 0 car non $\mathcal{C}^1$.

Rq 3 : On peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Théo 4 : (d'inversion globale) Si de plus f est injective sur U alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Contre-ex 5 : $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ n'est pas un $\mathcal{C}^1$ difféo global.

Théo 6 : (inversion holomorphe) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. On suppose f injective sur U alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f est un biholomorphisme de U sur $f(U)$.

Ex 7 : On peut définir les déterminations des logarithmes ainsi.

2) Quelques applications en algèbre et en analyse

Théo 8 : (Changement de coordonnées) Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On pose $f = (f_1, \dots, f_n)$, alors f induit un $\mathcal{C}^1$ difféo au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ ssi le déterminant Jacobien de f est non nul ssi les $df_i(a)$ sont linéairement indépendants.

App 9 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est assez proche de I_n, il existe un unique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^k = A$ de plus $f : A \mapsto B$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Théo 10 : (d'Alembert Gauss) Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Prop 11 : Soit $n \geq 3$ impair, $SO_n(\mathbb{R})$ est simple.

Théo 12 : L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective. [dev 1]

App 13 : $GL_n(\mathbb{C})$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit.

3) Applications en géométrie différentielle

Théo 14 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) \in O_n(\mathbb{R})$. alors f est une isométrie affine. [dev 2]

Def 15 :
- Une immersion ($\mathcal{C}^k$) de U dans $\mathbb{R}^n$ est une application $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^n$ dont la différentielle en tout point est injective.
- Une submersion $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^n$ est une application $\mathcal{C}^k$ dont la différentielle en tout point est surjective.

Théo 16 : (du rang constant) Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^1$, $0 \in U$ et $f(0) = 0$ et $df(0)$ injective alors il existe V voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$ et $U' \subset U$ contenant 0 tq $f(U') \subset V$ et un difféo $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$

tq $\varphi(f(x_1,\dots,x_n)) = (x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)$.

Ex 17 : Si $n=1$, f est une courbe de $\mathbb{R}^n$ le théo nous dit qu'en un point régulier la courbe f peut localement se transformer en un segment de droite de manière difféomorphe.

Théo 18 : (Lemme de Morse) Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^3$, $0 \in U$ $f(0)=0$, $df(0)=0$ et $d^2f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$ alors il existe un $\mathcal{C}^1$ difféo $\varphi : x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0)=0$ et $f(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2$.

II - Théorème des fonctions implicites (TFI)

1) Enoncé et variantes

Théo 19 : (TFI) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(a,b) \in U$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que $f(a,b)=0$ et que la matrice Jacobienne $D_y f(a,b) \neq 0$ alors l'équation $f(x,y)=0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^m$ avec $V \times W \subset U$ et $D_y f(x,y)$ inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$ et une unique application $\varphi : V \to W$ telle que $(x \in V, y \in W \text{ et } f(x,y)=0) \Leftrightarrow (x \in V, \text{ et } y = \varphi(x))$ De plus φ est $\mathcal{C}^1$ sur V.

Rq 20 : On peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$.

Ex 21 : • Le cercle peut être vu localement comme un graphe (sauf en $(\pm 1, 0)$). $(\{x^2+y^2=1\})$
• Le folium de Descartes $\{x^3+y^3-3xy=0\}$ aussi sauf en $(0,0)$ et $(2^{2/3}, 2^{1/3})$.

Rq 22 : On peut demontrer le TFI avec le TIL et inversement.

2) Quelques applications

Théo 23 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Soit x_0 une racine de P simple alors il existe U voisinage de $(a_0,\dots,a_n)$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et V voisinage de x_0 dans $\mathbb{C}$ et $\varphi : U \to V$ $\mathcal{C}^1$ tq $(x \in V, (b_0,\dots,b_n) \in U, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0) \Leftrightarrow (b_0,\dots,b_n \in U, x = \varphi(b_0,\dots,b_n))$

Coro 24 : $\{P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racine simple$\}$ est ouvert de $\mathbb{C}[X]$.

App 25 : Donner une solution approchée de la racine réelle de $x^7 + 0{,}99x - 2{,}03 = 0$.

III - Application aux sous-variétés

1) Définitions

On se place dans $\mathbb{R}^n$ dont on considère V un sous-ensemble et $x_0 \in V$.

Def 26 : On dit que V est une sous-variété de dimension k et de classe $\mathcal{C}^1$ si pour tout $x_0 \in V$ il existe W un voisinage de x_0 et $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^p$ difféomorphisme tq $\varphi(V \cap W) = \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$

Ex 27 : Les ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.
• $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$

Ex 28 : Soit C le cône de $\mathbb{R}^3$ défini par $x^2+y^2=z^2$. $C \setminus \{0\}$ est une sous-variété mais C ne l'est pas.

Théo 29 : (des sous-variétés) Il y a équivalence entre :

i) (carte local) V est une sous-variété de dim k de classe $\mathcal{C}^p$

ii) (équation) pour tout $x_0 \in V$ il existe W un voisinage de x_0 et $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ $\mathcal{C}^p$ tq $dF(x)$ soit injective $\forall x \in W$ et $V \cap W = F^{-1}(\{0\})$.

iii) (graphe) pour tout $x_0 \in V$ il existe W voisinage de x_0 de $\mathbb{R}^n$ U voisinage de $(x_{0,1},\dots,x_{0,k})$ de $\mathbb{R}^k$ et $u : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ $\mathcal{C}^p$ tels que $W \cap V = \{A(x, u(x)),\ x \in U\}$ avec A matrice de changement de base.

iv) (nappe paramétrée) $\forall x_0 \in V$, $\exists W \in \mathcal{V}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$, $U \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R}^k)$ $j : U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^p$ tq $j(0) = x_0$, $dj(x_0)$ injective et j bijection continue de U vers $V \cap W$.

Ex 30 : • La parabole $y = x^2$ est une $\mathcal{C}^\infty$ sous-variété de dim 1
• Le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est une $\mathcal{C}^\infty$ sous-variété de dim 1
• Le cône $C \setminus \{0\}$ $x^2 + y^2 = z^2$ est une $\mathcal{C}^\infty$ sous-variété de dim 2.

Ex 31 : • S^n est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$.
• Les graphes des fonctions de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ sont des sous-variétés.
• Tout sous-espace vectoriel de dim k est une sous-variété de dimension k.

2) Espace tangent

Def-Prop 32 : Soit V une sous-variété et $x_0 \in V$ l'espace tangent est l'espace vectoriel de dimension k
$T_{x_0}V = \{v \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable avec $0 \in \mathring{I}$,
$\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v\}$

Rq 33 : Parfois on parle d'espace affine tangent qui est $x_0 + T_{x_0}V$.

Théo 34 : On peut caractériser l'espace tangent comme ci-dessous (avec notations précédentes)
i) (carte locale) $T_{x_0}V = d\varphi(x_0)^{-1}.[\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$
ii) (équation) $T_{x_0}V = \ker(dF(x_0))$
iii) (graphe) $T_{x_0}V = \{A(h, du(z_0).h), h \in \mathbb{R}^k\}$ avec $z_0 = x_0 A(z_0, u(z_0))$
iv) (nappe paramétrée) $T_{x_0}V = dj(0)(\mathbb{R}^k)$.

Ex 35 : Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et $C_0(q) = \{x ; q(x) = 0\}$
Soit $x_0 \in C_0(q)$ alors $\{x_0\}^\perp$ est l'espace tangent en x_0 de la sous-variété $C_0(q)$.

3) Théorème des extremas liés

Théo 36 : (extrema liés) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ on pose $\Gamma = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $x_0 \in U$ et que la famille $(dg_i(x_0))_i$ est libre alors il existe $(\lambda_i)^r \in \mathbb{R}^r$ tels que $df(x_0) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(x_0)$. Les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

App 37 : (inégalité de Hadamard) Pour tout $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$
$|\det(u_1, \dots, u_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_2$.

App 38 : (inégalité arithmético-géométrique) Pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^n$ $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

App 39 : (Inégalité de Holder) : pour tout $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ dans $\mathbb{R}$,
$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $p, q > 1$.

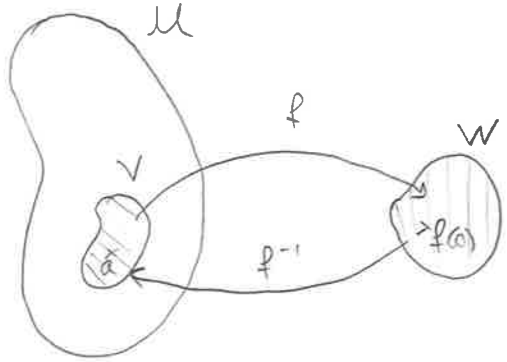
4) Etude des sous-variétés de $GL_n(\mathbb{R})$

Théo 40 : (Cartan-Von Neuman). Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$.

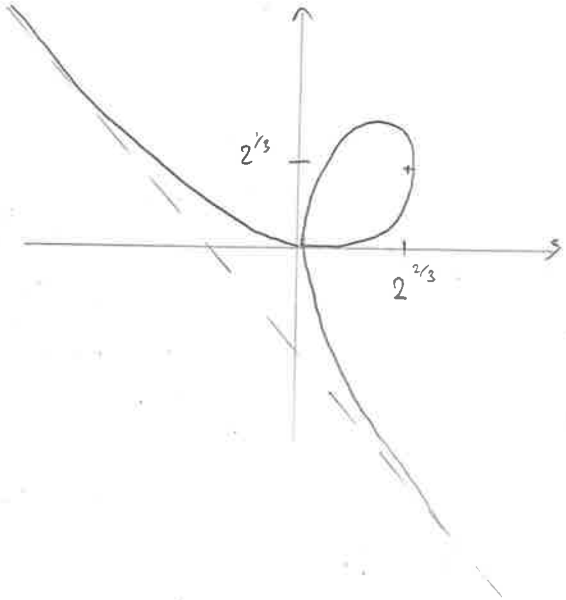
Prop 41 : $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$. L'espace tangent à $X \in SL_n(\mathbb{R})$ est $\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(X^{-1}H) = 0\}$.

Prop 42 : $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dim $\frac{n(n-1)}{2}$ avec
$T_X O_n(\mathbb{R}) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t(X^{-1}H) = -X^{-1}H\}$

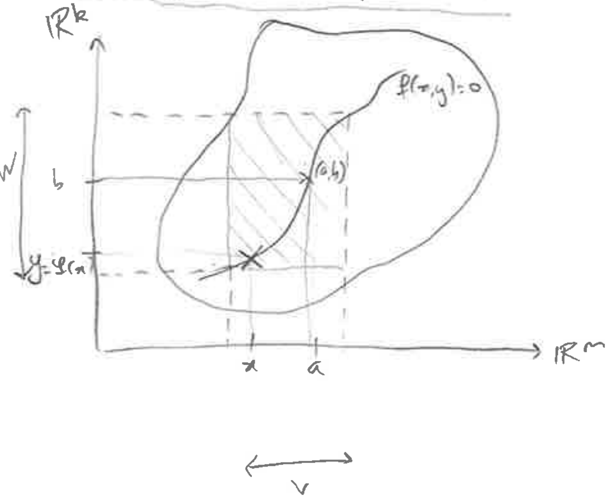
Thm inversion locale :



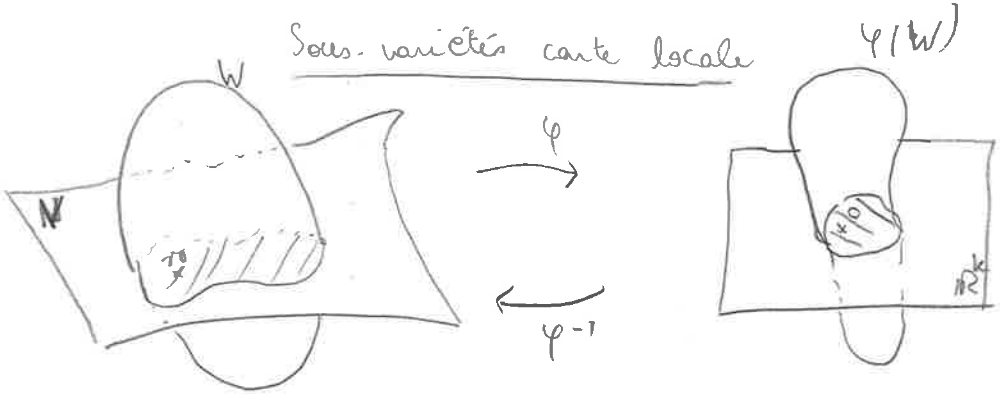
Folium de Descartes



Thm fonctions implicites :



Sous-variétés carte locale



Ex 21