Théorème d'inversion locale, fonctions implicites

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, et $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, $k \in [\![1;+\infty]\!]$

I- Inversion locale

1) C^k-difféo et inversion locale

Def 1: f est appelée C^k-difféomorphisme lorsqu'elle est bijective d'inverse C^k

Ex 2: exp est un C^∞-difféo entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$, x^3 n'en est pas un car $\sqrt[3]{x}$ non différentiable en 0.

Thm 3: (Inversion locale): Soit $x \in U$ tq Df_x soit inversible. Il existe V un voisinage ouvert de x dans U tq $f_{|V}$ soit un C^k-difféo sur son image.
On a de plus: $D_{f(x)} f^{-1} = (D_x f)^{-1}$

Ex 4: $(x;y) \mapsto (x^2-y^2; 2xy)$ a pour Jacobien $\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2)$, c'est donc un C^∞-difféo local en tout pt de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mais il n'est pas global.
$x \mapsto x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}$ n'est pas un difféo local en 0 bien que sa différentielle soit inversible (pas C^1)

Coro 5: (Inversion globale): Si Df est inversible en tout point et que f injective, c'est un C^k-difféo global

Ex 6: Le changement en coordonnées polaires est un C^∞-difféo de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$

Thm 7 (Hadamard-Levy): Soit $f \in C^1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. f est un C^1-difféo ssi Df est inversible en tout point et f est propre (ie $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$)

ii) En analyse complexe

Thm 8: Si $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe avec $f'(z) \neq 0$ alors f admet une inverse holomorphe sur un voisi de z.

Thm 9: $U \subseteq \mathbb{C}$ connexe ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ holo et injective. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f^{-1} holo de $f(U)$ dans U.

Ex 10: $\exp : \{z \in \mathbb{C} ; \mathrm{Im}(z) \in]a, a+2\pi[\} \to \mathbb{C}^*$ est un biholo pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Thm 11: Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant s'annule.

iii) En algèbre linéaire

Prop 12: $M \mapsto M^k$ est un C^∞-difféo au voisinage de Id $\Rightarrow$ on a une appli racine k-ième, $k \in \mathbb{N}$.

Prop 13: $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est C^∞, localement inversible en tout pt. 1

App 14: $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ surjective.

Prop 15: Il n'y a pas de sous-groupes arbitrairement petit dans $GL_n(\mathbb{C})$

II- Fonctions implicites

i) Théorème des fonctions implicites

Thm 16: $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un ouvert, $(x_0;y_0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k. Si $f(x_0,y_0) = 0$ et $D_y f(x_0,y_0)$ est inversible, alors il existe une appli φ de classe C^k tq $\varphi : V \to F$ où V est un voisinage de x_0 tq il existe un voisinage Ω de (x_0,y_0) tq: "$(x,y) \in \Omega$ et $f(x,y)=0$" $\Leftrightarrow$ "$x \in V$ et $y = \varphi(x)$"

Ex 17: (Folium de Descartes): La courbe d'équat° $x^3+y^3-3xy=0$. $f : (x,y) \mapsto x^3+y^3-3xy$ est C^∞

et $D_y f_{(x_0;y_0)} = 3(x_0^2 - y_0) \neq 0$ ssi $x_0^2 \neq y_0$. Donc le Follium s'exprime localement comme $(x, \varphi(x))$ en tout pt de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0); (2^{2/3}, 2^{1/3})\}$

Rq 18 : Il y a équivalence entre ce thm et celui d'inversion locale.

ii) Quelques applications

Prop 19 : La racine simple d'un polynôme dépend de manière C^∞ de ses coefficients.

App 20 : L'ensemble des polynômes scindés simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$

thm 21 : $U \subseteq \mathbb{R}^n$ non vide, $f, g_1, \dots, g_p \in C^1(U, \mathbb{R})$

On pose $A = \{x \in U ; g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$

Si $f_{|A}$ admet un extremum relatif en $a \in A$ et si les formes linéaires $dg_{1_a}; \dots; dg_{p_a}$ sont linéairement indépendantes alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tq $Df_a = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k Dg_{k_a}$

App 22 : $M \in M_n(\mathbb{R})$ de vecteurs colonnes $X_1, \dots, X_n$. Alors $|\det M| \leq \|X_1\|_2 \cdots \|X_n\|_2$

App 23 : Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, M est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont réelles.

App 24 : Trouver des extremas sous contraintes

III - Liens avec la géométrie

i) Sous-variétés

Def 25 : Soient $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in V$ et d un entier naturel. On dit que V est lisse en a de dim d s'il existe un difféo C^1 F d'un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$ tq : $F(V \cap U) = V' \cap F(U)$ avec $V' = \mathbb{R}^d \times \{0\}$

On dit que V est une sous-variété de dim d de $\mathbb{R}^n$ si tout pt de V est lisse de dim d.

Ex 26 : S^n est une sous-variété de dim $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.

$\{(x; x^2) ; x \in \mathbb{R}\}$ est une sous-variété de dim 1 de $\mathbb{R}^2$.

Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dim n : $GL_n(\mathbb{R})$ est une ss-var de dim n^2.

thm 27 : On a équivalence entre :

- V lisse en a, de dim d
- (def implicite) : il existe un ouvert $U \ni a$ de $\mathbb{R}^n$ et $n-d$ fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$, C^1, tq : "$x \in U \cap V$" $\Leftrightarrow$ "$x \in U$ et $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, $\forall i \in [\![1, n-d]\!]$ et les différentielles Df_{i_a} sont linéairement indé."
- (def paramétrique) : il existe un ouvert $U \ni a$ de $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et

m fonctions $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, C^1, tq :
$\varphi : u = (u_1, \dots, u_d) \mapsto x = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$ soit un homéomorphisme de Ω sur $V \cap \mathcal{U}$ avec $a = \varphi(0)$ et que $D\varphi_0$ soit injective

• (graphe) : il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage ouvert $\mathcal{U}'$ de $(a_1, \dots, a_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ et $m-d$ fonctions $g_i : \mathcal{U}' \to \mathbb{R}$, C^1, tq (modulo permutation des x_i) : $x \in \mathcal{U} \cap V \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{U}' \\ x_{d+1} = g_1(x_1, \dots, x_d), \dots, x_m = g_{m-d}(x_1, \dots, x_d) \end{cases}$$

App 28 : $O_n(\mathbb{R})$ est une ss-var car $O \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow O^tO - I_n = 0$
$SL_n(\mathbb{R})$ aussi car $S \in SL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(S) - 1 = 0$

Def 29 : Un vecteur $v \in \mathbb{R}^m$ est dit tangent en a à V s'il existe une fct dérivable $\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^m$ tq $\gamma(]-1,1[) \subseteq V$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$

thm 30 : Si V est lisse en a, de dim d, l'ensemble des vecteurs tangents en a forment un sev de dim d appelé espace tangent.

thm 31 : Lorsque V est définie implicitement, l'espace vectoriel tangent est constitué des v tq

$$\sum^m \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) v_j = 0, \dots, \sum^m \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a) v_j = 0$$

Ex 32 : Le plan tangent à $SL_n(\mathbb{R})$ en Id est $\{H \in M_n(\mathbb{R}), Tr(H) = 0\}$

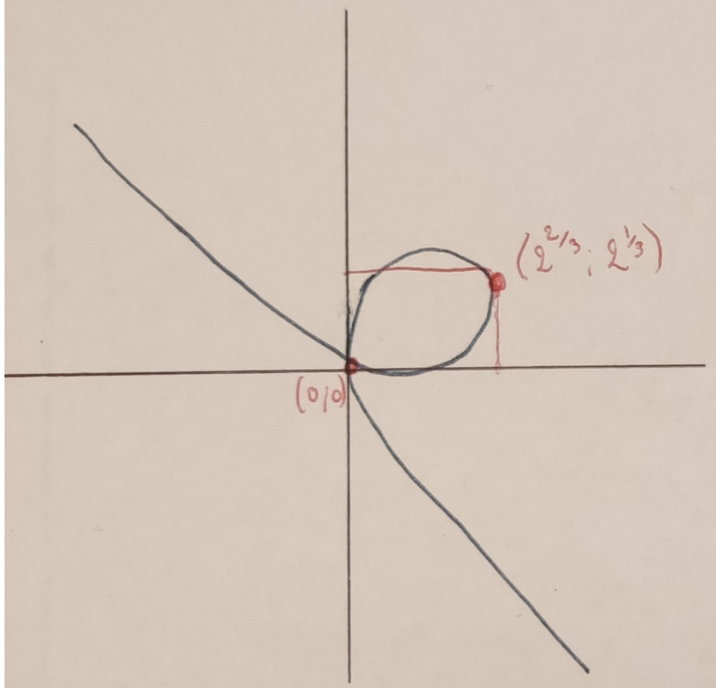
thm 33 : Tout sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

ii) Lemme de Morse

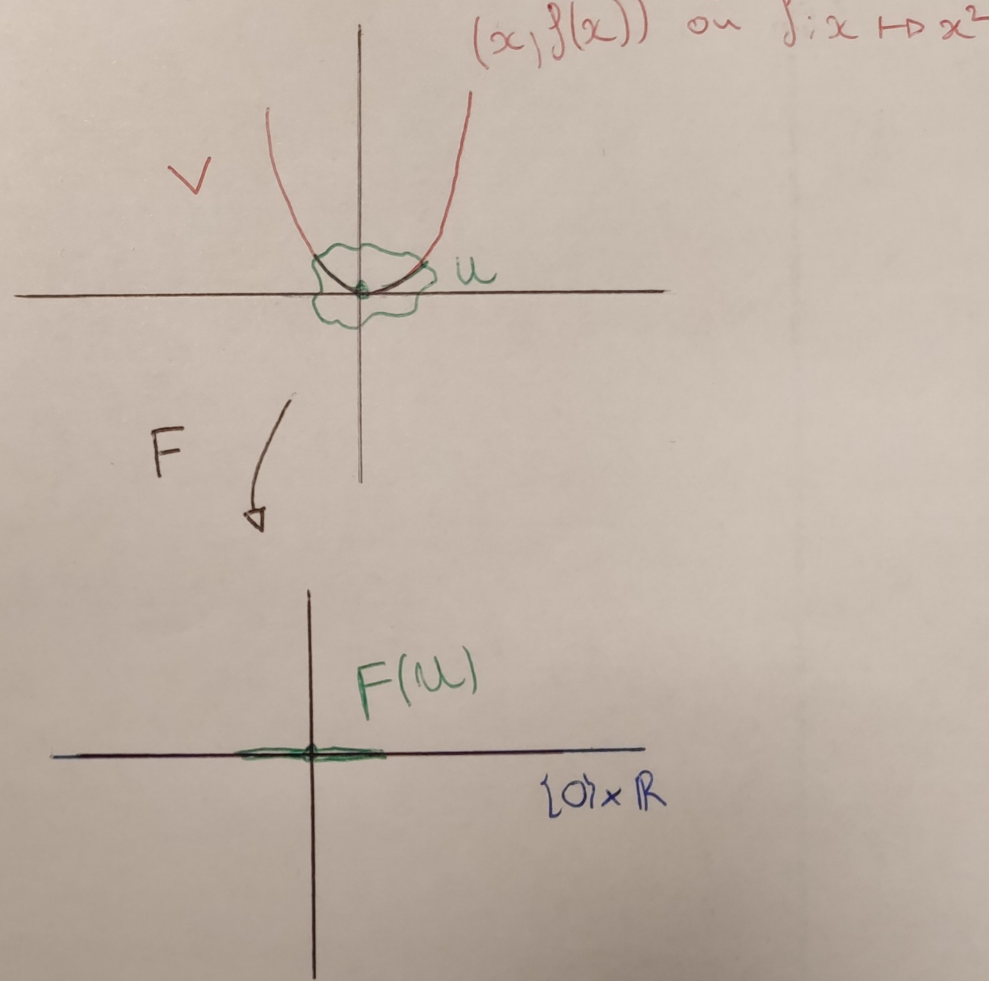
Prop 34 : Soit $A_0 \in S_n \cap GL_n$, il existe un ouvert V de $S_n(\mathbb{R})$ contenant A_0 tq il existe une appli $A \in V \mapsto M$ tq ${}^tMA_0M = A$ qui soit C^1.

Lemme 35 : $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ ouvert, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, C^3
On suppose que $x_0 \in \mathcal{U}$ est un point critique ($Df_0 = 0$) non dégénéré (D^2f forme quadratique non dégénérée) de signature $(p, m-p)$
Il existe un C^1-difféo entre un voisinage de x_0 et un voisinage de $f(x_0)$ tq : $\varphi : x \mapsto (u_1(x), \dots, u_n(x))$
et $f(x) - f(x_0) = u_1^2(x) + \dots + u_p^2(x) - u_{p+1}^2(x) - \dots - u_m^2(x)$

2



$(2^{2/3}; 2^{1/3})$
$(0,0)$



$(x, f(x))$ où $f : x \mapsto x^2$
V
U
F
$F(U)$
$\{0\} \times \mathbb{R}$