

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.
Exemples et applications en analyse et en géométrie

Motivations: généraliser l'inversion des $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou d'applications linéaires

⊕ Théorème d'inversion locale (TIL)

1) Énoncés et variantes (cadre: $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*(\infty)$)

Thm 1: (TIL) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , a un point de U et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application \mathcal{C}^1 . Si $Df(a)$ est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert de a (dans U) et $W \in \mathcal{V}_{f(a)}(\mathbb{R}^n)$ tels que f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de V sur W .

Rmq 2: on peut se placer dans des Banach en supposant $df(a)$ bijective de E dans F .

Rmq 3: De plus, si $f \in \mathcal{C}^p(U, \mathbb{R}^n)$, alors f est un \mathcal{C}^p difféo de V sur W .

Ex 4: $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ $f: (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme local sur U

Contre-ex 5: $\otimes f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x + x^2 \sin(\frac{1}{x})$ n'est pas un \mathcal{C}^2 difféo au voisinage de 0 car n'est pas \mathcal{C}^1 .

$\otimes f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^3$ n'est pas un \mathcal{C}^2 difféo au voisinage de 0 car $f^{-1} \notin \mathcal{C}^2$ il manque $Df(0)$ inversible.

Thm 6: (Théorème d'inversion globale) Soit U ouvert de \mathbb{R}^n $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Si f est injective sur U et que pour tout $x \in U$, $Df(x)$ est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n et f est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Contre-ex 7: Dans l'exemple 4, f est un \mathcal{C}^1 difféo local sur U mais pas global.

Thm 8: (Théorème d'inversion holomorphe) Soit U ouvert connexe de \mathbb{C} et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ fonction holomorphe on suppose f injective sur U . Alors $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{C} et f est un biholomorphisme de U sur $f(U)$.

2) Applications en analyse

Thm 9: (changement de coordonnées) Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $(u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n = f_n(x_1, \dots, x_n))$ définissent un changement de variables au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n \iff \det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \neq 0$

Ex 10: (coordonnées polaires) $f: (r, \theta) \in]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Prop 11: Les fonctions $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R})$, $x \mapsto e^x$, $\ln: \text{GL}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C})$, $Z(E) \rightarrow Z(E)$, $u \mapsto u \circ e^x$ sont resp. des \mathcal{C}^1 difféo local au voisinage des points resp. $0, 1, i\pi, i\pi/2$.

Prop 12: (perturbation de l'identité) Soit E Banach, $g \in \mathcal{C}^1(E, E)$. Si pour tout $x \in E$ $\|g(x)\|_{Z(E)} \leq 1$. Alors, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, $f_\varepsilon = I_E + \varepsilon g$ est un \mathcal{C}^1 difféo de $E \rightarrow E$.

Prop 13: Soit $n \geq 2$, $f: \mathbb{R}^{n*} \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ \mathcal{C}^1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}^{n*}$ $Df(x) \in \text{GL}(\mathbb{R})$ et $\|f(x)\|_2 = \|x\|_2$. Alors f est surjective.

Thm 14: (Lemme de Morse à deux variables) Soit U ouvert de \mathbb{R}^2 tel que $0 \in U$, Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{C}^2 . On suppose que la forme quadratique $D^2f(0,0)$ est non dégénérée. si signature $(D^2f(0,0)) = (2, 0)$, il existe u et v tels que $f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y) = u(x,y)^2 + v(x,y)^2$ si signature $(D^2f(0,0)) = (1, 1)$, il existe u et v tels que $f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y) = u(x,y)^2 - v(x,y)^2$

Appli 15: Etude locale d'une conique par rapport à son plan tangent (voir annexe)

Appli 16: Méthode de la phase stationnaire: étudier le comportement en $+\infty$ de $I(\lambda) = \int e^{i\lambda\psi(x)} a(x) dx$ où $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

3) Applications en algèbre linéaire et en géométrie

Thm 17: (D'Alembert Gauss) tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Prop 18: Soit $n \geq 3$ impair, $SO_n(\mathbb{R})$ est simple.

Prop 19: (Réduction des formes quadratiques) Soit $A_0 \in \mathcal{L}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$ il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi: V \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\pm 1}$ tels que $A = \varphi(A) A_0 \varphi(A) \forall A \in V$

Appli 20: Lemme de Morse en dimension n .

Thm 21: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\exp(\mathcal{C}[A]) = \mathcal{C}[A]^{\times}$

Corollaire 22: $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ surjective
 $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$ surjective

Appli 23: $GL_n(\mathbb{C})$ n'a pas de sous groupe arbitrairement petit.

II Théorème des fonctions implicites (TFI)

1) Énoncés

Thm 24: Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, $(a, b) \in U$, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^k)$
 Si $f(a, b) = 0$ et $D_y f(a, b)$ est inversible
 Alors il existe $V \in \mathcal{V}_a(\mathbb{R}^n)$, $W \in \mathcal{V}_b(\mathbb{R}^k)$ avec $V \times W \subset U$
 et $\varphi \in \mathcal{C}^1(V, W)$ telle que
 $(x \in V, y \in W, \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V, y = \varphi(x))$

Rmq 25: Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^k)$, alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(V, W)$ (généralisable au cas holomorphe)

Rmq 26: De plus, il y a existence de $D\varphi(x)$ sur V et l'on peut la calculer explicitement.

Ex 27: Le cercle $\{x^2 + y^2 = 1\}$ peut être vu localement comme un graphe (sauf en $(\pm 1, 0)$)
 Folium de Descartes $\{x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$ aussi sauf en $(0, 0)$ et $(2^{2/3}, 2^{2/3})$

Rmq 28: Historiquement, la première preuve du TFI utilise le théorème de Cauchy Lipschitz, on a en fait une équivalence entre (Cauchy Lipschitz) \Leftrightarrow (TIL) \Leftrightarrow (TFI) \Leftrightarrow (Point fixe de Picard)

2) Applications dans d'autres domaines

Thm 29: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n , $P = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Soit λ_0 une racine simple de P . Alors il existe $U \in \mathcal{V}_{(a_0, \dots, a_n)}(\mathbb{C}^{n+1})$, $V \in \mathcal{V}_{\lambda_0}(\mathbb{C})$ et $\varphi: U \rightarrow V \times \mathbb{C}^{\pm 1}$ tels que
 $(x \in V, (b_0, \dots, b_n) \in U, \sum_{i=0}^n b_i x^i = 0) \Leftrightarrow (b_0, \dots, b_n \in U, x = \varphi(b_0, \dots, b_n))$

Cor 30: $\{P \in \mathbb{C}[X] \text{ scindé simple}\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}[X]$ donc les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ forment un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Appli 31: Donner une solution approchée de la racine réelle de $x^7 + 0,99x - 2,03 = 0$

Appli 32: Trouver un développement asymptotique de $I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{f(x, \varepsilon)}}$ où $f(x, \varepsilon) = (x-a)(b-x) + \varepsilon x^2$ et $x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon)$ les deux premières racines de f .

Prop 33: Soient Σ_1 et Σ_2 deux nappes régulières \mathcal{C}^1 à paramétrage injectif, soit $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Si les plans tangents $T_p \Sigma_1$ et $T_p \Sigma_2$ en p sont distincts. Alors, au voisinage de p , l'intersection $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est une courbe dont la tangente en p est d'intersection $T_p \Sigma_1 \cap T_p \Sigma_2$ des deux plans tangents.

III Sous-variétés (Cadre: $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}, k \in \mathbb{N}^*$)

1) Sous-variétés et espaces tangents

Def 34: (sous-variété) $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension k et de classe \mathcal{C}^p si pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ un \mathcal{C}^p difféomorphisme local tel que $\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$

Ex 35: les ouverts de \mathbb{R}^n sont des sous-variétés, $GL_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^{n^2}

Thm 36: (des sous-variétés) Il y a équivalence entre:

(i) (carte locale) N est une sous-variété de dim k de classe \mathcal{C}^p
 (ii) (équation) pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ et $F: W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ \mathcal{C}^p tels que $dF(x)$ soit surjective $\forall x \in W$ et $N \cap W = F^{-1}(\{0\})$

(iii) (graphe) pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$, $U \in \mathcal{V}_{(x_0, \dots, x_0, k)}(\mathbb{R}^k)$ et $u: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe \mathcal{C}^p tels que $W \cap N = \{A(x, u(x)), x \in U\}$ avec A une matrice de changement de base

(iv) (nappe paramétrée) pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$, $U \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R}^k)$ et $j: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ \mathcal{C}^p telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ injective et j est une bijection bi-continue de U vers $W \cap N$

Ex 37: La parabole $y = x^2$ est une \mathcal{C}^∞ sous-variété de dimension 1
 Le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est une \mathcal{C}^∞ sous-variété de dimension 1
 Le cône $x^2 + y^2 = z^2$ est une \mathcal{C}^∞ sous-variété de dimension 2

Def 38 (espace tangent) Soit N une sous-variété, soit $x_0 \in N$
 l'espace tangent est l'espace vectoriel de dimension k
 $T_{x_0}N = \{v \in \mathbb{R}^n \text{ tel qu'il existe } \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ avec } 0 \in I, \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma'(0) = v\}$

Rem 39: Parfois on parle d'espace affine tangent qui est $x_0 + T_{x_0}N$.

Thm 40: on peut caractériser l'espace tangent comme ci-dessous

- (i) (carte locale) $T_{x_0}N = d\varphi(x_0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$
- (ii) (équation) $T_{x_0}N = \text{Ker}(dF(x_0))$
- (iii) (graphe) $T_{x_0}N = \{A(h, du(z_0, h)), h \in \mathbb{R}^k\}$ avec $z_0 / x_0 = A(z_0, u(z_0))$
- (iv) (nappe paramétrée) $T_{x_0}N = dj(0)(\mathbb{R}^k)$

Ex 41: Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et $x_0 \in C_0(q)$
 Alors $\{x_0\}^\perp$ est l'espace tangent en x_0 de la sous-variété $C_0(q)$

2) Théorème des extrema liés

Thm 42: (extrema liés) Soit $U \in \mathbb{R}^n$, $f, g_1, \dots, g_{n-k} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$
 on pose $\Gamma = \{x \in U, g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_{n-k}(x) = 0\}$

Si $f|_\Gamma$ admet un extremum local en $x_0 \in U$ et que la famille $dg_i(x_0)$ est libre
 Alors il existe $(\lambda_i)_{i=1}^{n-k} \in \mathbb{R}^{n-k}$ tels que
 $df(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i dg_i(x_0)$

Appli 43: pour tout $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$
 $|\det(u_1, \dots, u_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\|_2$
 inégalité d'Hadamard

Appli 44: pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$
 $(\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
 inégalité arithmético-géométrique

Appli 45: pour tout $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q \in \mathbb{R}^+$
 $\sum_{i=1}^p a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^p a_i^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^q b_i^q)^{1/q}$
 inégalité de Hölder où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $p > 1$ $q > 1$

3) Application à l'étude des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$

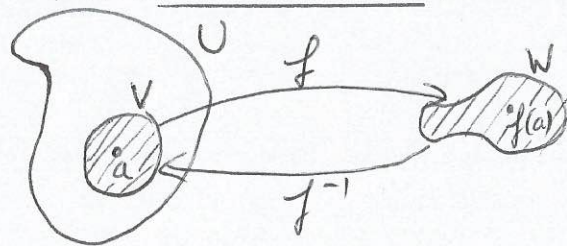
Thm 46: (Cartan - Von Neumann)
 Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^{n^2}

Ex 47: on peut illustrer ce théorème grâce au tableau en annexe regroupant les résultats pour des sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$ suivants: $GL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R}), O_n(\mathbb{R}), Sp_{2n}(\mathbb{R})$ et $O(p, q)$

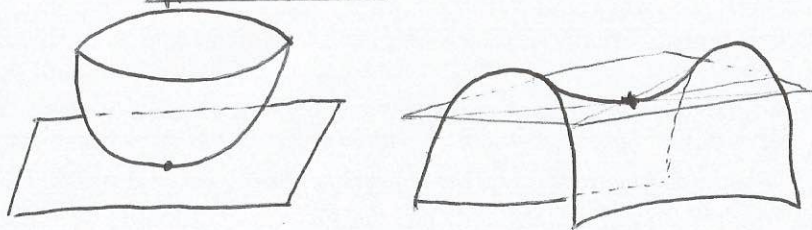
DEV2

DEV3

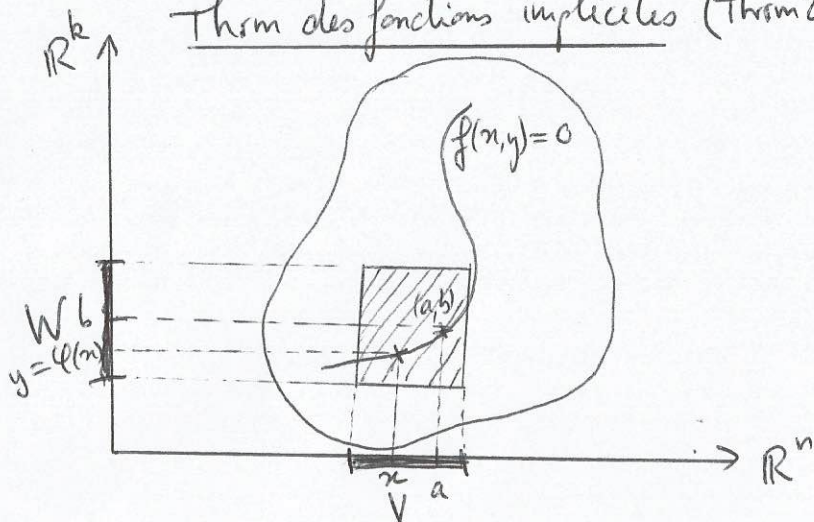
Thm d'inversion locale (Thm 1)



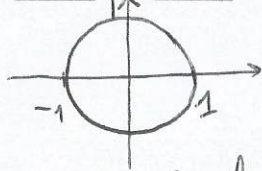
Application 15



Thm des fonctions implicites (Thm 24)



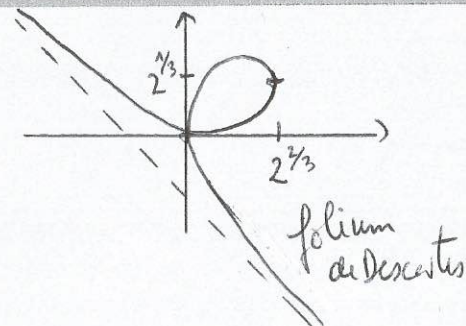
Exemple 27



cercle

sous variétés.

Carte locale (Def 34)



folium de Descartes

Ex 47 : Illustration de Cartan Von Neumann

ssgp formé de $GL_n(\mathbb{R})_G$	immersion F $t_g G = F'(p_0)$	déterminant de dF_{I_n}	espace tangent en I_n $T_{I_n} G$	dimension
$GL_n(\mathbb{R})$	0	0	$\mathcal{J}_n(\mathbb{R})$	n^2
$SL_n(\mathbb{R})$	$\det - 1$	tr	$\mathcal{J}_n(\mathbb{R}) = \{ \text{tr}(M) = 0 \}$	$n^2 - 1$
$O_n(\mathbb{R})$	$F(M) = {}^t M M - I_n$	$dF_{I_n} \cdot H = H + {}^t H$	$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$Sp_{2n}(\mathbb{R})$	$F(M) = {}^t M J M - J$	$dF_{I_n} \cdot H = JH + {}^t H J$	$\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) = {}^t J \mathcal{J}_{2n}(\mathbb{R})$	$\frac{2n(2n+1)}{2}$
$G(p,q)$	$F(M) = {}^t M I_p M - I_q$	$dF_{I_n} \cdot H = I_p H + {}^t H I_q$	$\mathcal{G}(p,q) = \{ I_p H + {}^t H I_q = 0 \}$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$