214

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie

I - Inversion locale, fonctions implicites.

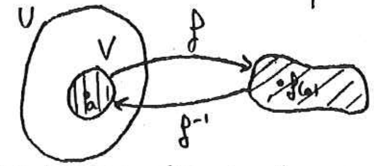
① Le théorème d'inversion locale

<u>Déf 1</u>: Soient U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$, on dit que $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V si f est bijective et si f, f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

<u>Th 2</u>: Inversion locale

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $Df(a)$ est inversible. Alors il existe V ouvert tq $a \in V$, et $V \subset U$ et W ouvert tq $f(a) \in W$, tels que $f : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

<u>Rem 3</u>: Le théorème affirme que l'équation $f(x) = y$, $y \in W$ admet une solution unique $x \in V$.



<u>Ex 4</u>: Soit $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$. Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

<u>C-ex 5</u>: f doit être $\mathcal{C}^1$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \sin\frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, dérivable en 0.

Le théorème d'inversion locale ne s'applique pas.

<u>Cor 6</u>: Inversion globale

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que f est injective sur U et que $\forall x \in U$, $Df(x)$ est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

<u>C-ex 7</u>: $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$ (de l'Exemple 4) n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global.

<u>Cor 8</u>: Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall x \in U$, $Df(x)$ est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

② Le théorème des fonctions implicites.

<u>Th 9</u>: Fonctions implicites

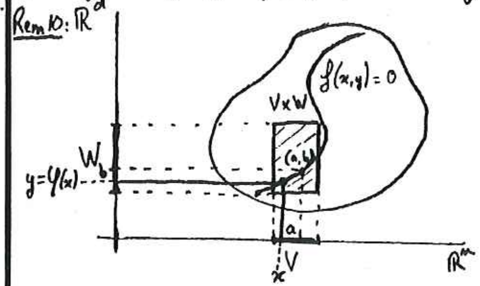
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, $(a,b) \in U$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^d$.

On suppose que $f(a,b) = 0$ et que $D_y f(a,b)$ est inversible.

Alors l'équation $f(x,y) = 0$ peut être résolue localement par rapport à y, ie $\exists V$ voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^d$, avec $V \times W \subset U$ et $\exists\, \varphi : V \to W$ $\mathcal{C}^1$ unique telle que :

$(x \in V, y \in W$ et $f(x,y) = 0) \iff (x \in V$ et $y = \varphi(x))$

<u>Rem 10</u>:



On appelle φ la fonction implicite définie par f au voisinage de (a,b).

Le théorème dit que la "courbe" définie implicitement par $f(x,y)=0$ peut être (localement) vue comme le graphe de φ.

<u>Rem 11</u>: C'est un résultat local, si on agrandit trop W, on peut perdre l'unicité de φ.

<u>Ex 12</u>: L'équation $x^2+y^2-1=0$ définit deux fonctions implicites φ_1 et φ_2 correspondant aux demis cercles supérieur et inférieur.

$V_1 =]-1,1[$, $W_1 =]0;+\infty[$, $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$

$V_2 =]-1,1[$, $W_2 =]-\infty,0[$, $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$

<u>Ex 13</u>: Le folium de Descartes :

L'équation $x^3+y^3-3xy = 0$ définit une fonction implicite en tout point différent de $(0,0)$.

<u>Rem 14</u>: Dans les deux théorèmes, on peut remplacer $\mathcal{C}^1$ par $\mathcal{C}^k$.
Ils sont également valables dans des espaces de Banach.

<u>Rem 15</u>: Le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites sont "équivalents".

Demailly.
IV.4.

II - Applications des théorèmes :

① Applications en analyse

Déf 16 : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f : U \to \mathbb{R}^d$ est : (f $\mathcal{C}^1$)
- une immersion en $a \in U$ si $Df(a)$ est injective (et donc $n \leq d$)
- une submersion en $a \in U$ si $Df(a)$ est surjective (et donc $n \geq d$)

Prop 17 : Lemme de l'immersion ($n \leq d$)
Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une immersion en $a \in U$.
Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ d'un voisinage de $f(a)$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $\varphi \circ f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$

Prop 18 : Lemme de la submersion. ($n \geq d$)
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une submersion en $a \in U$.
Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ d'un voisinage de $f(a)$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $f \circ \varphi^{-1} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d)$.

Th 19 (Rang constant)
Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $rg(Df) = r$ constant sur U.
Alors il existe U_a voisinage ouvert de a, $V_{f(a)}$ voisinage ouvert de $f(a)$ et $\varphi : W_1 \to U_a$, $\psi : V_{f(a)} \to W_2$ (W_1, W_2 ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^d$) deux $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes tels que :
$$\forall x \in V_{f(a)}, \quad \psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

Reformulations 20 :
- À un changement de variables près, toute immersion est localement égale à l'injection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^d$.
- À un changement de variables près, toute submersion est localement égale à la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^d$
- À un changement de variables près, toute application dont la différentielle est de rang constant est équivalente à $J_r(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

Th 21 : Hadamard-Lévy
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x)$ est inversible et f est propre (ie $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f^{-1}(K)$ compact)

Prop 22 : L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un voisinage de Id dans $GL_n(\mathbb{K})$.

App 23 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

DEV

Lem 24 : Racine carrée :
Soit E Banach, $B \in End(E)$ tq $\|1 - B\| < 1$. Alors il existe une suite de polynômes en B qui converge vers R dans $End(E)$, tel que $R^2 = B$. R est noté $\sqrt{B}$.
De plus, $\exists U$ voisinage de Id_E tel que $B \in U \mapsto \sqrt{B}$ soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme sur son image.

Th 25 : Lemme de Morse - Palais
Soit U voisinage de a un point d'un espace de Hilbert E.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $f(a) = 0$ et a est un point critique non dégénéré, ie $Df(a) = 0$ et $\begin{array}{l} E \to E^* \\ h \mapsto D^2 f(a) \cdot (h, \cdot) \end{array}$ est un isomorphisme.
Alors il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local au voisinage de a, φ, tel que $\varphi(a) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{2} D^2 f(a) \cdot (\varphi(x), \varphi(x))$.

App 26 : Avec les mêmes hypothèses, si on a que de plus $D^2 f(a)$ est définie positive, alors a est un minimum strict local de f.

② Champs de vecteurs

Déf 27 : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On appelle champ de vecteurs sur U une application $v : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Th 28 : Redressement d'un champ de vecteurs
Soit v un champ de vecteurs sur U voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$.
Soit $x \in U$, $y = \varphi_t(x)$ solution de $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v(y) \\ y(0) = x \end{cases}$.

Si $v(0) \neq 0$ alors il existe un changement de coordonnées $y = f(Y)$ au voisinage de 0 qui transforme le système différentiel en : $\frac{dY}{dt} = V$, $Y(0) = X$ avec $V = (1, 0, \dots, 0)$ et $x = f(X)$.
Le changement de coordonnées "redresse" v en un champ de vecteurs constant V.

III - Sous-variétés

1) Définition

Déf 29: Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f : U \to \mathbb{R}^d$ est : (f $\mathcal{C}^1$)

- une immersion si f est une immersion en tout point de U
- une submersion si f est une submersion en tout point de U.
- un plongement si f est une immersion injective homéomorphe sur son image

Déf 30: Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in V$ et $d \in \mathbb{N}$.

- On dit que V est lisse en a, de dimension d s'il existe un difféomorphisme F de classe $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ sur le voisinage ouvert $F(U)$ de 0 sur $\mathbb{R}^n$, qui transforme V en sous espace vectoriel de dimension d, ie :

$$F(V \cap U) = V' \cap F(U) \quad \text{avec } V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$

- On dit que V est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ si V est lisse (de dimension d) en chacun de ses points.

Ex 31: Le cône C d'équation $x^2+y^2-z^2=0$ est lisse de dimension 2 en chacun de ses points, sauf l'origine. Donc $C \setminus \{0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Th 32 : des sous-variétés.

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, et d un entier naturel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) V est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$.

(ii) (déf implicite) $\forall a \in V$, $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert tq $a \in U$ et $\exists g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion telle que $U \cap V = g^{-1}(\{0\})$.

(iii) (déf paramétrique) $\forall a \in V$, $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert tq $a \in U$, $\exists \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^d$ tq $0 \in \Omega$ et $\exists h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui est une immersion dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap V$.

(iv) (graphe) $\forall a \in V$, $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert tq $a \in U$, $\exists \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert contenant $(a^1, \dots, a^d)$ et une application $\mathcal{C}^\infty$ G, de Ω dans $\mathbb{R}^{n-d}$ tq, après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap V$ soit égal au graphe de G.

Ex 33 :
- La sphère S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ est une sous variété de dimension n.
- Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA = I_d\}$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1.
- Le sous ensemble V_r de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de rang fixé r est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2-(n-r)^2$
- $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension n^2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2) Espace tangent

Déf 34: Soient $V \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in V$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent en a à V s'il existe une fonction dérivable $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ (où I intervalle ouvert contenant 0) telle que :

$\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Th 35: Si V est lisse en a de dimension d, ses vecteurs tangents en a forment un sous-espace vectoriel de dimension d, appelé espace vectoriel tangent en a à V, on le note T_aV

Th 36: Extréma liés. DEV

Soit V une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, f une fonction $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage de V. Si $a \in V$ est tel que $f(a)$ est un extremum local de $f_{|V}$, alors $Df(a)_{|T_aV} = 0$. En particulier, si $g = (g_1, \dots, g_{n-d})$ est une submersion telle que $g^{-1}(\{0\}) = V$, (Th 32, (ii)), alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}) \in \mathbb{R}^{n-d}$ tq $\lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_{n-d} Dg_{n-d}(a) = Df(a)$

App 37: Inégalité arithmético-géométrique

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

App 38: Inégalité de Hadamard

Soient $v_1, \dots, v_n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$

App 39: Théorème spectral

Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont toutes réelles.

hors sujet.

Th 40: Cartan-Von-Neumann (Admis)

Soit V un sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors V est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Prop 41: On a des isomorphismes $\mathcal{C}^\infty$ de groupes :

$$SU(2)/\{\pm I_2\} \xrightarrow{\simeq} SO(3)$$

$$SL(2)/\{\pm I_2\} \xrightarrow{\simeq} SO_+(1,3)$$

DVPMT possible : * Demo du th 21 [Zuily - Queffelec] via calcul diff.

* App 23   * Demo d'inversion locale.

* SO_n simple [Gonord - Tosel]

* Th 40.   * prop 41.

Questions : * $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ bij. A-t-on f^{-1} $\mathcal{C}^1$? NON x^3.

* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ et bij. A-t-on f^{-1} $\mathcal{C}^0$? OUI car f monotone.

Références :
- Presque tout est dans Rouvière
- Gourdon : Cor 8, App 37
- Avez : Lem 24, Th 25, Ex 33, App 26
- Objectif Agrégation : App 39, App 26
- Mneimné - Testard : Prop 22, App 23, Th 40
- Gonnord et Tosel : Prop 41

LEMME DE MORSE-PALAIS

Le lemme de la submersion montre qu"une fonction définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ à valeurs réelles est localement difféomorphe à une application linéaire autour d'un point où sa différentielle est non nulle. Le lemme de Morse-Palais étudie le comportement d'une telle fonction aux points où la différentielle est nulle, appelés *points critiques.* Comme pour le lemme de la submersion, on va demander une condition d'inversibilité, cette-fois ci à l'ordre deux : la différentielle seconde est en effet une forme bilinéaire symétrique, on la dit *non singulière* si elle induit un isomorphisme de l'espace ambiant sur son dual topologique. Un point critique auquel la différentielle seconde est non singulière est alors appelé point critique *non dégénéré.* Le résultat est alors le suivant.

Théorème. *Soit H un espace de Hilbert réel, U un ouvert de H et $f : U \to \mathbf{R}$ de classe C^{k+2}, $k \geq 1$. Supposons $a \in U$ soit un point critique non dégénéré. Alors il existe un C^k-difféomorphisme local φ en a tel que $\varphi(a) = 0$ et*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} D_a^2 f \cdot (\varphi(x), \varphi(x))$$

Lemme. *Soit E un espace de Banach. Si $u \in \mathrm{End}(E)$ est tel que $\|\mathrm{Id} - u\| < 1$, alors il existe une suite de polynômes en u qui converge vers un endomorphisme v tel que $v^2 = u$, que l'on note $\sqrt{u}$. De plus, il existe un voisinage de* Id *tel que $u \mapsto \sqrt{u}$ soit un C^∞-difféomorphisme.*

Preuve. L'endomorphisme v est une racine carrée de u si et seulement si $w := \mathrm{Id} - v$ est solution de l'équation $w = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - u + w^2)$. On définit donc une suite $w_n \in \mathrm{End}(E)$ par récurrence :

$$w_0 = 0, \qquad w_{n+1} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Id} - u + w_n^2), \ n \geq 0$$ —> suite de Babylone.

Soit $a = \|\mathrm{Id} - u\| < 1$; on montre $\|w_n\| < \sqrt{a}$. C'est évident pour $n = 0$, et on a :

$$\|w_{n+1}\| \leq \frac{1}{2}(a + \|w_n\|^2) \leq a \leq \sqrt{a}$$

par récurrence. On a d'autre part, en soustrayant les définitions de w_{n+1} et w_n, l'identité $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2}(w_n^2 - w_{n-1}^2)$. En sommant ces identités entre n et $n+p-1$ on trouve

$$w_{n+p} - w_n = \frac{1}{2}(w_{n+p-1}^2 - w_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(w_{n+p-1} - w_{n-1})(w_{n+p-1} + w_{n-1})$$

où la dernière égalité vient du fait que (w_n) est une famille de polynômes en u donc commutent deux à deux. Comme $\|w_n\| < \sqrt{a}$, on obtient $\|w_{n+p} - w_n\| < \sqrt{a}\|w_{n+p-1} - w_{n-1}\|$, et en itérant $\|w_{n+p} - w_n\| < \sqrt{a}^n\|w_p - w_0\| < \sqrt{a}^{n+1}$. La suite (w_n) est de Cauchy donc converge dans l'espace complet $\mathrm{End}(E)$. De plus sa limite w vérifie l'équation voulue et $\|w\| < \sqrt{a}$, de sorte que $v := \mathrm{Id} - w$ vérifie $v^2 = u$. Si l'on fixe $r < 1$, alors $v \in \mathrm{B}(\mathrm{Id}, \sqrt{r})$ si $u \in \mathrm{B}(\mathrm{Id}, r)$.

Finalement la différentielle en l'identité de l'application $Q : v \mapsto v^2$ de classe C^∞ est $D_{\mathrm{Id}} Q \cdot h = 2h$, donc par inversion locale c'est un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage de l'identité, sans perte de généralité contenu dans $\mathrm{B}(\mathrm{Id}, \sqrt{r})$, sur un voisinage de l'identité, sans perte de généralité contenu dans $\mathrm{B}(\mathrm{Id}, r)$. L'application construite précédemment est alors l'inverse de Q, d'où le caractère C^∞. □

Remarque. On aurait aussi pu prendre la série entière en 1 de la racine carrée, de rayon de convergence 1, et l'appliquer à $u \in \mathrm{B}(\mathrm{Id}, 1)$. Dans l'espace complet des fonctions continues bornées de $\mathrm{End}(E)$ dans lui-même, il y a convergence normale de la série et de ses séries dérivées ; de plus c'est bien la racine carrée puisque le produit de cauchy $(\sum a_n x^n)^2 = x$ se transporte en $(\sum a_n u^n)^2 = u$, la série $\sum a_n u^n$ étant absolument convergente.

Preuve. Sans perte de généralité on peut supposer $a = 0$, $f(a) = 0$. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \int_0^1 (1-t) D_0^2 f(tx) \cdot (x,x) \, \mathrm{dt} = g(x) \cdot (x,x)$$

où l'intégrale de Riemann $g(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t) D_a^2 f(tx) \, \mathrm{dt}$ est bien définie puisque calculée dans un espace complet ; la fonction g est de classe $\mathcal{C}^k$.

On a les isomorphismes (linéaires, bicontinus, isométriques) $\mathcal{L}(E, E; \mathbf{R}) \cong \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathbf{R})) = \mathcal{L}(E, E^*) \cong \mathcal{L}(E, E) = \mathrm{End}(E)$, le dernier étant donné par l'isomorphisme $E \cong E^*$ du théorème de Riesz. Ceci donne l'existence d'une fonction $A \colon U \to \mathrm{End}(E)$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que

$$g(x) \cdot (h,k) = \langle A(x)h, k \rangle$$

De plus $g(x)$ est symétrique donc $A(x)$ est un endomorphisme symétrique pour tout $x \in U$. Il vient alors

$$\langle A(0)h, k \rangle = g(0) \cdot (h,k) = \frac{1}{2} D_0^2 f \cdot (h,k)$$

Comme $D_0^2 f$ est non singulière, $h \mapsto \langle A(0)h, \cdot \rangle \in E^* = \{\langle y, \cdot \rangle,\ y \in E\}$ est un isomorphisme donc $A(0)$ est inversible, et $A(x)$ est inversible au voisinage de 0.

Posons $B(x) = A(0)^{-1} A(x)$. Alors $B(x)$ est proche de l'identité pour x petit, donc admet une racine carrée $C(x)$; comme l'application racine carrée est $\mathcal{C}^\infty$, C est de classe $\mathcal{C}^k$. Alors

$$B(x)^* = A(x) A(0)^{-1}$$

d'où

$$B(x)^* A(0) = A(0) B(x)$$

Cette relation est aussi vraie pour tout polynôme de $B(x)$ par récurrence, donc l'est pour $C(x)$ par continuité, et il vient

$$C(x)^* A(0) C(x) = A(0) C(x) C(x) = A(0) B(x) = A(x)$$

de sorte que

$$f(x) = \langle A(x)x, x \rangle = \langle C(x)^* A(0) C(x) x, x \rangle = \langle A(0) C(x) x, C(x) x \rangle = \frac{1}{2} D_0^2 f \cdot (C(x)x, C(x)x)$$

De plus l'application $\varphi \colon x \mapsto C(x)x$ vérifie

$$D_0 \varphi \cdot h = C(0) \cdot h + C(h) \cdot 0 = C(0) \cdot h$$

par la règle de Leibniz, donc est un difféomorphisme local puisque $C(0) = \sqrt{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$ (par unicité) est inversible. □

References

1. A. Avez, *Calcul différentiel*, Masson (1983), chap. 8.

THÉORÈME DES EXTREMAS LIÉS

Le théorème des extrema liés est un critère pratique pour rechercher les extrema d'une fonction dont les variables sont "liées" par des relations ; usuellement on considère une fonction définie sur un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie et on cherche une condition nécessaire à ce que la restriction de cette fonction à une partie suffisamment sympathique ait un extremum en un point de cette partie.

Théorème (Extrema liés). *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f, g_1, \ldots, g_{n-k} : U \to \mathbf{R}$ des fonctions $\mathcal{C}^1$. Posons $M = \{x \in U,\ g_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, n-k\}$. Si $f_{|M}$ admet un extremum local en $a \in M$, et si $(D_a g_i)$ est libre, alors il existe $(\lambda_i) \in \mathbf{R}^{n-k}$ tel que :*

$$D_a f = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i D_a g_i$$

On va commencer par analyser la condition qui porte sur $(D_x g_i)$.

Lemme. *Soit E, F des espaces vectoriels réels de dimension finie, U un ouvert de E.*

Soit $g\colon U \subset E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$ tel que $D_a g$ soit surjective. Alors il existe un difféomorphisme local $\varphi\colon U \to E$ en a tel que $g \circ \varphi^{-1}$ soit la projection linéaire $F \oplus G \to F$ au voisinage de $\varphi(a)$.

Preuve. Soit F' un supplémentaire de $\ker D_a g$. Alors $F' \cong F$ (*via* $D_a g_{|F'}$) donc qui à composer à droite par un isomorphisme linéaire, on identifie F' à F. Posons :

$$\varphi\colon \begin{cases} U \subset F \oplus \ker D_a g & \longrightarrow \quad F \oplus \ker D_a g \\ \quad u, v & \longmapsto \quad (g(u,v), v) \end{cases}$$

Alors dans une base adaptée à la décomposition on a

$$\operatorname{mat} D_a \varphi = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

avec A inversible, d'après l'hypothèse sur $D_a g$. Ainsi par le théorème d'inversion local φ est un difféomorphisme local en a et si π_F la projection sur F, on a $g = \pi_F \circ \varphi$. □

On peut maintenant détailler la structure de la partie M définie précédemment.

Corollaire. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, U un ouvert de E et $g_1, \ldots, g_{n-k}\colon U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $(D_a g_i)$ est libre en tout $x \in U$, alors $M = \bigcap g_i^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension k au voisinage de a. Son espace tangent en $a \in M$ est $\bigcap \ker D_a g_i$.*

Preuve. Soit

$$g\colon \begin{cases} U & \longrightarrow \quad \mathbf{R}^{n-k} \\ x & \longmapsto \quad (g_i(x)) \end{cases}$$

Alors

$$\ker D_a g = \bigcap \ker D_a g_i = \bigcap \{D_a g_i\}^{\perp} = \operatorname{Vect}(D_a g_i)^{\perp}$$

de sorte que par le théorème du rang, $\operatorname{rg}(D_a g) = n - k$ et $D_a g$ est surjective. Par le lemme, il existe donc φ un difféomorphisme local en a tel que $g \circ \varphi^{-1}$ est une projection $\pi : \mathbf{R}^{n-k} \oplus G \to RR^{n-k}$.

Comme il est clair que $\pi^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension k, il en est de même de g au voisinage de a. On remarque alors que T_aM et $\bigcap \ker D_a g_i$ ont même dimension, d'après le calcul précédent ; il suffit donc de montrer une inclusion. Soit γ une courbe $\mathcal{C}^1$ tracée sur M telle que $\gamma(0) = a$. Alors $g_i \circ \gamma = 0$ donc en différentiant, $D_a g_i \cdot \gamma'(0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-k\}$. Ainsi $\gamma'(0) \in \bigcap \ker D_a g_i$ et $T_aM \subset \bigcap \ker D_a g_i$. □

La preuve est maintenant immédiate :

Preuve. Soit γ une courbe $\mathcal{C}^1$ tracée sur M avec $\gamma(0) = a$. Alors $f \circ \gamma$ a un extremum local en 0, donc $(f \circ \gamma)'(0) = D_a f \cdot \gamma'(0) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \ker D_a f \supset T_aM &= \bigcap \ker D_a g_i \\ \Leftrightarrow \{D_a f\}^\perp &\supset \mathrm{Vect}(D_a g_i)^\perp \\ \Leftrightarrow D_a f &\in \mathrm{Vect}(D_a g_i) \end{aligned}$$

□

Citons maintenant une application classique.

Proposition. *Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors u est diagonalisable en base orthonormée.*

Preuve. On remarque d'abord qui si F est un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ l'est aussi : si $x \in F^\perp$ et $y \in F$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$ car $u(y) \in F$. Il suffit donc de trouver un vecteur propre normé pour u pour conclure par récurrence.

Soit
$$f \colon \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \langle u(x), x\rangle \end{cases}$$
La sphère unité $\mathbf{S} = \{x \in E,\ \|x\|^2 = 1\}$ est une sous-variété définie par la submersion $g \colon x \mapsto \|x\|^2 - 1$, de différentielle $D_x g = \langle 2x, \cdot\rangle$ surjective pour $x \in \mathbf{S}$.

Comme $\mathbf{S}$ est compacte, $f_{|\mathbf{S}}$ admet un extremum en $e \in \mathbf{S}$. On peut donc appliquer le théorème des extrema liés : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $D_e f = \lambda D_e g$. Comme $f = \langle \cdot, \cdot \rangle \circ (u, \mathrm{id})$ et que le produit scalaire est bilinéaire, on calcule
$$D_e f \cdot h = D_{(u(e),e)}\langle \cdot, \cdot\rangle \cdot (u(h), h) = \langle u(e), h\rangle + \langle u(h), e\rangle = \langle 2u(e), h\rangle$$
par symétrie de u. On obtient alors $\langle 2u(e), h\rangle = \lambda \langle 2e, h\rangle$ pour tout $h \in E$, donc $u(e) = \lambda e$. □

References

1. A. Avez, *Calcul différentiel*, Masson (1983), chap. 8-10.