924 Théories et modèles en logique du 1er ordre. Exemples.

I) Généralités sur les modèles et théories

DEF 1 : Un langage $\mathcal{L}$ du premier ordre est la donnée :
- de symboles de constante c ;
- de symboles de fonction, chacun ayant son arité ;
- de symboles de relation (avec arité aussi).

EX 2 : (théorie des groupes) une constante (le neutre), les fonctions $*$ et $^{-1}$ et le symbole de relation $=$.

On définit l'ensemble des termes, puis inductivement à l'aide des symboles $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \exists, \forall\}$ l'ensemble des formules, les variables, et les notions de variable liée, formule close, atomique, ...

1) Interprétations

DEF 3 : Une interprétation $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ est formée de :
- un ensemble M, le domaine de $\mathcal{M}$;
- pour chaque symbole de constante c, un élément $c_{\mathcal{M}}$ de M ;
- pour chaque symbole de fonction n-aire f, une fonction $f_{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$;
- pour chaque symbole de relation n-aire R un sous-ensemble $R_{\mathcal{M}}$ de M^n.

On définit la notion de véracité d'une formule close F dans un modèle $\mathcal{M}$ par induction. On note $Val_{\mathcal{M}}(F)$ la valeur de vérité de F dans $\mathcal{M}$ (i.e. 0 ou 1). On note $\mathcal{M} \models F$ si $Val_{\mathcal{M}}(F) = 1$ et on dit que $\mathcal{M}$ satisfait F.

EX 4 : (théorie des groupes) On prend $M = \mathbb{Z}$, on interprète e par 0, $*$ par l'addition et $^{-1}$ par $m \mapsto -m$, $=$ par l'égalité au sens habituel.

DEF 5 : Deux formules F et G sont dites équivalentes ssi $\mathcal{M} \models (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$.

EX 6 : $\forall x \forall y\ x = y$ et $\forall x \forall y\ \neg(\neg(x = y))$ sont équivalentes.

2) Modèles et théories

DEF 7 : Une théorie est un ensemble (fini ou infini) de formules closes. Les éléments d'une théorie sont appelés axiomes.

DEF 8 : Soit T une théorie.
- une interprétation $\mathcal{M}$ satisfait T (on dit aussi que $\mathcal{M}$ est un modèle de T et on note $\mathcal{M} \models T$) si $\mathcal{M}$ satisfait toutes les formules de T.
- T est contradictoire ssi il n'existe pas de modèle de T.
- une formule close F est valide dans T (on note $T \models F$) ssi $\mathcal{M} \models F$ pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T.

EX 9 : (Axiomes de la théorie des groupes) Sur le langage $\mathcal{L} = \{e, *, ^{-1}\}$ on définit les axiomes :
- $\forall x, y, z\ \{(x * y) * z = x * (y * z)\}$ (associativité)
- $\forall x\ \{x * e = x \wedge e * x = x\}$ (neutre)
- $\forall x\ \{x * x^{-1} = e \wedge x^{-1} * x = e\}$ (inverse)

Remarque : On peut aussi prendre le langage $\{*\}$

et remplacer les deux derniers axiomes par :
$\exists e \forall x \{(x*e = x \wedge e*x = x) \wedge \exists y (x*y = e \wedge y*x = e)\}$.
un modèle est alors un groupe au sens usuel. En particulier, cette théorie est non contradictoire.

3) Systèmes de preuve.

Etant fixé un système de preuve ayant une notion d'absurde $\perp$ (déduction naturelle classique, résolution,...) on peut définir une notion de démonstration dans une théorie.

DEF 10 : Soit T une théorie.

- Soit F une formule. On note $T \vdash F$ s'il existe un sous-ensemble fini T' de T tel que $T' \vdash A$ (au sens preuve dans le système de preuve).
- On dit que T est consistante ssi $T \nvdash \perp$
- on dit que T est complète ssi T est consistante (absurde) et pour toute formule close F on a $T \vdash F$ ou $T \vdash \neg F$.

PROP 11 : Soit T une théorie complète, A, B des formules closes.

- $T \vdash A \vee B$ ssi $T \vdash A$ ou $T \vdash B$
- $T \vdash \neg A$ ssi $T \nvdash A$

Rem : on dit que F est un théorème de T si $T \vdash F$.

II Exemples de modèles et théories

1) Modèles de Herbrand et méthode de résolution

On rappelle la méthode de résolution pour un ensemble E de formules closes :

- on met chaque formule sous forme prénexe
- on skolémise ces formules
- on distribue les quantificateurs.

On obtient un ensemble de clauses $C_1, \dots, C_n$ et on renomme les variables de sorte qu'elles n'apparaissent pas dans deux clauses différentes.

DEF 12 : (règle de résolution) Pour C, C_1, C_2 trois clauses, C est une résolvante de C_1 et C_2 s'il existe $S_1 \subset C_1$ et $S_2 \subset C_2$ tels que :

- S_1 et S_2 sont unifiables par σ mgu
- $C = ((C_1 \setminus S_1) \cup (C_2 \setminus S_2))\sigma$

DEF 13 : un modèle de Herbrand H d'un langage $\mathcal{L}$ est défini par :

- le domaine H est l'ensemble des termes clos de $\mathcal{L}$
- chaque constante est interprétée par elle-même
- f d'arité n est interprétée par $(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(t_1, \dots, t_n)$
- à chaque formule atomique close $R(t_1, \dots, t_n)$ on associe une variable de Herbrand $p[R(t_1, \dots, t_n)]$.

Étant donnée une distribution de vérité σ sur les variables, on interprète R par $R_{H(\sigma)} = \{(t_1, \dots, t_n)$ tel que $\sigma(p[R(t_1, \dots, t_n)]) = 1$

TH 14 : (Complétude de la méthode de résolution).
Soit Σ un ensemble de clauses non contradictoires. Alors il existe un arbre de résolution qui réfute Σ. (DEV)

La réciproque est aussi vraie donc on a le théorème :

TH 15 : Soit T une théorie, F une formule close.
Alors $T \models F$ ssi $T \vdash F$.

COR 16 : Soit T une théorie. T est contradictoire ssi il existe un sous-ensemble fini de T qui est contradictoire.

Application 17 : (du théorème 15) La théorie des groupes n'est pas complète car $\forall x, y \{x * y = y * x\}$ n'est pas prouvable et sa négation non plus (il y a des groupes commutatifs et d'autres qui ne le sont pas).

2) Théorie de l'égalité

Soit $\mathcal{L}$ contenant $=$. La théorie $E_=$ de l'égalité est donnée par les axiomes :

- $\forall x \{x = x\} \wedge \forall x, y \{x = y \rightarrow y = x\} \wedge \forall x, y, z \{x = y \wedge y = z \rightarrow x = z\}$
- pour tout symbole de fonction f d'arité n : $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \{\bigwedge_{1 \le i \le n} x_i = y_i\} \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$
- Pour tout symbole de relation R d'arité n (autre que $=$) $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \{(\bigwedge_{1 \le i \le n} x_i = y_i) \rightarrow [R(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow R(y_1, \dots, y_n)]\}$

Remarque : On peut intégrer ces axiomes dans un système de déduction.

DEF 18 : On dit qu'un modèle $\mathcal{M}$ est égalitaire si l'égalité est interprétée par $\{(x, x) \mid x \in M\}$.

PROP 19 : Soit T une théorie contenant la théorie de l'égalité. Si T admet un modèle alors T admet un modèle égalitaire.

TH 20 (de Lowenheim - Skolem) :
Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable, et T une théorie contenant la théorie de l'égalité. Si T admet un modèle infini, alors T admet un modèle dénombrable.

III) Théories récursives, décidables

DEF 21 : Une théorie est récursive si l'ensemble de ses axiomes est décidable, décidable si l'ensemble de ses théorèmes l'est, i.e étant donnée F une formule, peut-on dire si F est un axiome ou si $T \vdash F$?

1) Arithmétique de Peano

On définit sur $\mathcal{L} = \{0, S, +, \times\}$ les axiomes de P_0 :

- $\forall x \{Sx \neq 0\}$, $\forall x \{x = 0 \vee \exists y (x = Sy)\}$
- $\forall x, y \{Sx = Sy \rightarrow x = y\}$. $\forall x \{x + 0 = x\}$
- $\forall x, y \{x + Sy = S(x + y)\}$. $\forall x \{x \times 0 = 0\}$
- $\forall x, y \{x \times Sy = x \times y + x\}$.

On obtient la théorie de Peano (PA) en ajoutant pour toute formule :

$$\forall \{F[x := 0] \wedge \forall y (F[x := y] \rightarrow F[x := Sy])\} \rightarrow \forall x F$$

clôture universelle.

On rappelle :

TH 22 : (de Gödel) Si T est récursive et complète, elle est décidable.

On peut utiliser ce théorème pour montrer qu'une théorie $T \supseteq P_0$ récursive et non contradictoire est incomplète, donc PA en particulier.

2) Arithmétique de Presburger

C'est un cas particulier où on se restreint au langage $\{0, S, +, =\}$.

TH 23 : La théorie de l'arithmétique de Presburger est décidable (DEV).

Références :

Nour
Carton
Stern