264 – Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I- Définition, moments et lois usuelles

Déf 1: Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite discrète (vad) si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Rq 2: Dans ce cas, la loi de X s'écrit $\mathbb{P}_X = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_i)\delta_{x_i}$ avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.

Ex 3: $X : \Omega \to \{0,1\}$ telle que $\mathbb{P}(X=1) = p \in [0,1]$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Prop 4: Soit X une vad avec $X(\Omega) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On suppose $x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots$ Alors la fonction de répartition de X est constante sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}[$ et admet un saut de hauteur $\mathbb{P}(X = x_{i+1})$ en x_{i+1}.

Prop 5: Soit X une vad avec $X(\Omega) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On note $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Alors X admet un moment d'ordre 1 ssi $\sum_i |x_i| p_i < +\infty$. Dans ce cas, $\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p_i$.

Ex 6: Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}[X] = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$.

C-ex 7: Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha}{n^2}$ pour $n \geq 1$, où $\frac{1}{\alpha} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. Alors X n'admet pas de moment d'ordre 1.

Prop 8: Soit X une vad. Avec les mêmes notations, X admet un moment d'ordre 2 ssi $\sum_i x_i^2 p_i < +\infty$. Dans ce cas, $\mathbb{E}[X^2] = \sum_i x_i^2 p_i$ et $V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$.

Prop 9 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev): Soient X une vad et $\alpha > 0$. Alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$ si X admet un moment d'ordre 2.

App 10 (Théorème de Weierstrass): Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $x \in [0,1]$. Alors $B_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

Ex 11:

$\mathbb{P}_X$	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}[X]$	$V(X)$
$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$[\![1,n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
$\mathcal{H}(n,r,r_1)$		$\frac{\binom{r_1}{k}\binom{r-r_1}{n-k}}{\binom{r}{n}}$	$\frac{nr_1}{r}$	

C-ex 12: L'espérance et la variance ne caractérisent pas la loi.

k	-2	-1	1	2
$\mathbb{P}(X_1=k)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$
$\mathbb{P}(X_2=k)$	$1/8$	$1/2$	0	$3/8$

Alors $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$ et $V(X_1) = V(X_2) = \frac{5}{2}$.

II- Chaînes de Markov et marches aléatoires

Prop 13: Soient X et Y deux vad. Alors X et Y sont indépendantes ssi $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.

Ex 14 : Soit $X \sim \mathcal{U}([\![1,6]\!])$. On pose $Y = X \bmod 2$ et $Z = \begin{cases} 0 & \text{si } X \geq 3 \\ 1 & \text{si } X \leq 2 \end{cases}$

Alors Y et Z sont indépendantes.

Déf 15 : Soit E un ensemble dénombrable. Soit $P : E \times E \to [0,1]$ telle que $\forall x, \sum_{y \in E} P(x,y) = 1$. On dit qu'une suite de va $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale ν (noté Markov(P,ν)) si :

- $X_0 \sim \nu$
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(x_n, x_{n+1})$,

$\forall x_0, \dots, x_{n+1} \in E$ tels que $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0$.

Ex 16 : Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite de va indépendantes de loi uniforme sur $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$ où $(e_1, \dots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

On appelle marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ la suite $X_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$.

Prop 17 : $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov (P,ν) ssi $\forall n \geq 0$,

$\forall x_0, \dots, x_n \in E, \quad \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \nu(x_0) P(x_0, x_1) \times \dots \times P(x_{n-1}, x_n)$

Déf 18 : On définit par récurrence $p^{(n)}(x,y)$ pour $x,y \in E$ comme suit :

$p^{(0)}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $p^{(n+1)}(x,y) = \sum_{z \in E} p(x,z) p^{(n)}(z,y)$

Prop 19 :
- $p^{(1)}(x,y) = p(x,y)$
- $p^{(m+n)}(x,y) = \sum_{z \in E} p^{(m)}(x,z) p^{(n)}(z,y)$
- $p^{(n)}(x,y) = \mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x)$ si $\mathbb{P}(X_0 = x) > 0$

Th 20 (Propriété de Markov) : Soit $m \in \mathbb{N}$, soit $x \in E$. Conditionnellement à $X_m = x$, $(X_{n+m})_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov (P, δ_x) indépendante de $X_0, \dots, X_m$.

Déf 21 : Soit $x \in E$. On définit $\tau_x = \inf\{n \geq 1, X_n = x\}$.

On dit que x est récurrent si $\mathbb{P}(\tau_x < +\infty \mid X_0 = x) = 1$.

Prop 22 : Soit $x \in E$. Alors x est récurrent ssi $\sum_{n \geq 0} p^{(n)}(x,x) = +\infty$

App 23 : Pour $d = 1$ ou 2, la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente.

Prop 24 : Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ issue de 0. Alors $\mathbb{P}(|X_n| \longrightarrow +\infty) = 1$. DEV 1

III - Fonctions génératrices

Déf 25 : Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une vad. On définit la fonction génératrice de X, notée G_X, par : $\forall s \in [0,1]$, $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$

Prop 26 : Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X. Alors :

- $G_X(1) = 1$ et $\forall s \in [0,1]$, $0 \leq G_X(s) \leq 1$.
- $G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n s^n$, $\forall s \in [0,1]$ où $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.
- G_X est continue sur $[0,1]$, de classe C^∞ sur $[0,1[$

Prop 27 : Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

$\forall n \geq 0, \quad \mathbb{P}(X = n) = p_n = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

En particulier, G_X caractérise la loi de X.

Ex 28 :
- $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $G_X(s) = (1-p) + ps$
- $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $G_X(s) = ((1-p) + ps)^n$
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $G_X(s) = \exp(\lambda(s-1))$

Prop 29 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. X admet un moment d'ordre k ssi G_X est k fois dérivable (à gauche).

Dans ce cas, $G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$.

En particulier, $G_X'(1) = \mathbb{E}[X]$.

Ex 30 : Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}[X] = \lambda$

$\mathbb{E}[X(X-1)] = \lambda^2$ puis $V(X) = \lambda$.

Prop 31 : Si X et Y sont des va à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s)\,G_Y(s)$, $\forall s \in [0,1]$.

Ex 32 : • Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$

• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Prop 33 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit N une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose :

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \mathbb{1}_{N\geq n}.$$ Alors $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.

De plus, si N et X_1 admettent un moment d'ordre 1, alors S aussi et $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X_1]$.

App 34 (Galton-Watson) : Soit $(X_{i,j})_{i,j\geq 1}$ une famille de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit $m = \mathbb{E}[X_{1,1}] < +\infty$.

DEV 2

On définit : $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \end{cases}$ et $p_{ext} = \mathbb{P}(\exists n, Z_n = 0)$.

On suppose que $\mathbb{P}(X_{1,1} = 0) \in]0,1[$. Alors :

- si $m \leq 1$, $p_{ext} = 1$
- si $m > 1$, $p_{ext} \in]0,1[$

IV - Théorèmes limite

Prop 35 : Soient X, X_n des va à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Alors :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{ssi} \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X=k)$$

Prop 36 : Si X, X_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{ssi} \quad \forall s \in [0,1],\ G_{X_n}(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} G_X(s)$$

Cor 37 (théorème de Poisson) : Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

Th 38 (Moivre-Laplace) : Soit $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Références :

Ouvrard - Probabilités 1 et 2

Norris - Markov chains

Appel - Probabilités pour les non probabilistes

Feller - An introduction to Probability theory and Its Applications

Cottrel - Exercices de probabilités.

Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$.

<u>Théorème</u> $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$. Soit $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ famille de variables aléatoires discrètes, indépendantes et identiquement distribuées, telles que pour tout $j \in [\![1,d]\!]$,

$$\mathbb{P}(\xi_1 = e_j) = \mathbb{P}(\xi_1 = -e_j) = \frac{1}{2d},$$

où $(e_j)_{j\in[\![1,d]\!]}$ base canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $X_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Alors

$$\mathbb{P}\left(|X_n| \xrightarrow[n]{} +\infty\right) = 1.$$

<u>Démo</u> L'idée directrice est de montrer que pour $k \in \mathbb{Z}^d$, $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n = k)$ converge. Alors par Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(X_n = k : \text{i.s. en } n\right) = 0,$$ et en notant

$$N_k := \left|\left\{n \in \mathbb{N} : X_n = k\right\}\right|,$$

N_k est fini presque sûrement, ce qui permettra de conclure.

* <u>$k = 0$</u> On note pour $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi(t) := \varphi_{\xi_1}(t) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle t,\xi_1\rangle}\right] = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2d}\left(e^{i\langle t,e_j\rangle} + e^{i\langle t,-e_j\rangle}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos(t_j). \qquad (*)$$

Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{X_n}(t) = [\varphi(t)]^n$ par indépendance des ξ_i, et

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\varphi_{X_n}(t)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{T^d}\mathbb{P}(X_n=k)\,e^{i\langle t,k\rangle}\,dt$$

où $T := [-\pi,\pi]$, par Fubini, car $\int_{T^d}|\mathbb{P}(X_n=k)\,e^{i\langle t,k\rangle}|\,dt$ est le terme d'une série convergente. De plus,

$$\int_{T^d} e^{i\langle t,k\rangle}\,dt = \int_{T^d}\prod_{j=1}^{d} e^{i(t_j k_j)}\,dt_1\cdots dt_d = (2\pi)^d\,\delta_{k,0}$$

avec $\delta_{a,b}$ le symbole de Kronecker. Ainsi

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\varphi_{X_n}(t)\,dt = \mathbb{P}(X_n=0).$$

Pour n impair, $\mathbb{P}(X_n=0)=0$ [plus généralement, si n et $|k| := |k_1|+\cdots+|k_d|$ n'ont pas même parité, $\mathbb{P}(X_n=k)=0$]. De plus,

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X_{2n}=0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\sum_{n\geq 0}[\varphi(t)]^{2n}\,dt$$

par Fubini-Tonelli [car par $(*)$, $(\varphi(t))^2\geq 0$]. Or

$$|\varphi(t)|=1 \quad \underline{\text{ssi}} \quad t=0 \text{ ou } t=\pm(\pi,\dots,\pi),$$

donc $|\varphi(t)|<1$ pp sur T^d, et

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X_{2n}=0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\frac{dt}{1-\varphi(t)^2}.$$

φ est continue sur $T^d\setminus\{0,\pm(\pi,\dots,\pi)\}$ et $\cos(t_j\pm\pi) = -\cos(t_j)$, donc pour avoir que notre somme converge, il suffit de montrer l'intégrabilité de $\frac{1}{1-\varphi^2}$ au voisinage de 0. Or

$$\varphi(t) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} 1-\frac{t_j^2}{2}+o(t_j^2) = 1-\frac{\|t\|_2^2}{2d}+o(\|t\|_2^2),$$

donc

$$1-\varphi(t)^2 = \frac{\|t\|_2^2}{d}+o(\|t\|_2^2) \sim \frac{\|t\|_2^2}{d}.$$

qui est intégrable en 0 car $d\geq 3$.

$\underline{\cdot \in \mathbb{Z}^d}$. On se ramène au cas précédent. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Alors

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \geq \mathbb{P}(X_n = 0 \text{ et } X_\ell = -k)$$
$$\geq \mathbb{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_\ell = -k \text{ et } \xi_{\ell+1} + \cdots + \xi_n = k)$$
$$\geq \mathbb{P}(X_\ell = -k)\, \mathbb{P}(X_{n-\ell} = k), \qquad \text{car les } \xi_i \text{ sont iid}$$

Or pour $\ell = |k|$, $\mathbb{P}(X_\ell = -k) \geq \left(\frac{1}{2d}\right)^\ell > 0$. Donc

$$\sum_{n \geq \ell} \mathbb{P}(X_{n-\ell} = k) \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X_\ell = -k)} \sum_{n \geq \ell} \mathbb{P}(X_n = 0) < \infty.$$

* <u>conclusion</u>

$$\mathbb{P}(|X_n| \xrightarrow[n]{} +\infty) = \mathbb{P}(\forall A,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |X_n| \geq A)$$
$$= \lim_{A \to +\infty} \mathbb{P}(\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |X_n| \geq A)$$
$$= \lim_{A \to +\infty} \mathbb{P}(\forall k,\ |k| \leq A,\ N_k \text{ fini})$$
$$= 1.$$

Car $\left(\{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |X_n| \geq A\}\right)_{A \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion,

et car $\{\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |X_n| \geq A\} = \{\forall k,\ |k| \leq A,\ N_k \text{ fini}\}$.

Processus de Galton - Watson.

Notations:

Soit $(X_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ famille de variables aléatoires iid, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $G := G_{X_{1,1}}$ leur fonction génératrice commune, et pour $k\in\mathbb{N}$, $p_k := \mathbb{P}(X_{1,1}=k)$.

On définit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence:

$$\begin{cases} Z_0 := 1 \\ Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}, \end{cases}$$

et on s'intéresse à $p_{ext} := \mathbb{P}(\exists n\in\mathbb{N}, Z_n = 0)$.

Z_n représente la population à l'instant n, et $X_{i,n}$, pour $i\in[\![1, Z_n]\!]$, le nombre de descendant du i-ème individu de la "génération" n. p_{ext} est donc la probabilité d'extinction de la population.

Théorème $p_0 = \mathbb{P}(X_{1,1}=0) \in]0,1[$. On suppose que $m := \mathbb{E}[X_{1,1}] < \infty$. Alors

* si $m \leq 1$, $p_{ext} = 1$
* si $m > 1$, p_{ext} est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$.

On commence par montrer deux lemmes:

Lemme 1 sur $]0,1[$, G est

(i) strictement croissante

(ii) convexe

(iii) strictement convexe <u>ssi</u> $p_0 + p_1 < 1$.

Démo : $G(1) = \sum_{k\geq 0} p_k 1^k = 1$, donc pour $s \in]-1,1[$,

la série entière $\sum_{k\geq 0} p_k s^k$ converge. On peut donc

dériver une, et deux fois : pour $s \in]0,1[$,

$$G'(s) = \sum_{k\geq 1} p_k\, k\, s^{k-1} \quad \text{et} \quad G''(s) = \sum_{k\geq 2} p_k\, k(k-1)\, s^{k-2}.$$

(i) $p_0 < 1$, donc il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_{k_1} \neq 0$ [car $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$]

Alors pour $s \in]0,1[$, $G'(s) \geq p_{k_1} k_1 s^{k_1 - 1} > 0$.

(ii) Comme les p_k sont positifs, $G''(s) \geq 0$

(iii) Si $p_0 + p_1 < 1$, il existe $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 \geq 2$, tel que $p_{k_2} \neq 0$, et

pour $s \in]0,1[$, $G''(s) \geq p_{k_2} k_2 (k_2 - 1) s^{k_2 - 2} > 0$

Si $p_0 + p_1 = 1$, $G(s) = p_0 + p_1 s$ n'est pas strictement convexe. □

__Lemme 2 :__ p_{ext} est le plus petit point fixe de G.

__Démo__ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $G_n := G_{Z_n}$. Alors

$\pi_n := \mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$. On remarque que $p_{ext} = \lim_n \pi_n$,

[car $\{Z_n = 0\}$ est croissant pour l'inclusion], on cherche une relation sur les π_n.

On montre par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n ne dépend que des $(X_{i,j})_{\substack{j\leq n-1\\ i\in\mathbb{N}}}$.

* $Z_1 = X_{1,0}$

* $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n}$, et Z_n ne dépend que des $(X_{i,j})_{j\leq n-1}$.

En particulier, Z_n est indépendante des $(X_{i,n})_{i\in\mathbb{N}}$, donc par proposition 33, $G_{n+1} = G_n \circ G$.

Par une récurrence immédiate, on en déduit $G_n = \underbrace{G\circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}}$, et

donc $G_{n+1} = G \circ G_n$.

si $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$. Pour $n \longrightarrow +\infty$ [G continue] on a

$p_{ext} = G(p_{ext})$.

Montrons de plus que p_{ext} est le plus petit point fixe de G sur $]0,1[$: soit $u \in]0,1[$ tel que $G(u) = u$. On a par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n \leq u$.

* $\left.\begin{array}{l} u = G(u) \\ \pi_1 = G(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1 \leq u$ car G croissante [lemme 1]

* $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n \leq u$. Alors par croissance de G,
  $\pi_{n+1} = G(\pi_n) \leq G(u) = u$.

En passant à la limite on obtient $p_{ext} \leq u$. □

On montre à présent le théorème :

<u>Démo :</u> Le cas où $p_0 + p_1 = 1$ est simple, puisqu'alors G affine et $G(x) = x$ admet au plus une solution [$p_0 \neq 0$]. Or $G(1) = 1$, donc 1 unique point fixe de G. Enfin, si $p_0 + p_1 = 1$, alors $\mathbb{E}[X_{1,1}] = 1$.

On suppose donc $p_0 + p_1 \neq 1$, et par lemme 1, G strictement convexe.

* <u>Si $m \leq 1$.</u> Alors pour $t \in]0,1[$, $G'(t) < G'(1) = m \leq 1$. Donc pour $s \in]0,1[$, $1 - G(s) = \int_s^1 G'(t)\,dt < 1 - s$. Ainsi $G(s) > s$, et 1 est l'unique point fixe de G [$G(0) = p_0 \neq 0$].

* <u>Si $m > 1$.</u> Posons $F(x) := G(x) - x$. Alors $F'(x) = G'(x) - 1$, et F' s'annulle en un unique $\alpha \in [0,1[$. [car G' croissante, donc F' aussi]. Ainsi F est strictement croissante sur $[\alpha, 1]$, et strictement décroissante sur $[0, \alpha]$. On en déduit que

x	0		α		1
$F'(x)$	$p_1 - 1 \leq 0$	$-$	0	$+$	$m - 1 > 0$
$F(x)$	p_0	$\searrow$	≤ 0	$\nearrow$	0

F s'annule sur $]0,1[$ en un unique point. □