262

Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorème limite. Exemples et applications.

I/ Différents modes de convergence

Dans les 3 premières sous sections, les suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1) Convergence presque sûre :

Définition 1 : On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X si $P(\{\omega \mid X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1$. On note alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$.

Rem 2 : La variable aléatoire X considérée est unique, à égalité sur un ensemble presque sûr près.

Ex 3 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a indépendantes, de loi $\mathcal{B}(1/2)$. Alors $\sum_{k=1}^{n} X_k \times 2^{-k} \xrightarrow{p.s} X$, avec $X \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Prop 4 : Soit $\varepsilon > 0$. Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $E_k(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$ et $E(\varepsilon) = \limsup_{n\to+\infty} E_n(\varepsilon) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k(\varepsilon)$ qui sont tous deux mesurables. La famille $(E_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est décroissante et $D = \bigcup_{\varepsilon>0} E(\varepsilon)$ est mesurable. De plus, $X_n \xrightarrow{p.s} X$ si et seulement si $P(D) = 0$.

Prop 5 : (Caractérisations) $X_n \xrightarrow{p.s} X$ si et seulement si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- pour tout $\varepsilon > 0$, $P(E(\varepsilon)) = 0$
- pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| > \varepsilon$ infiniment souvent$) = 0$
- pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\sup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} \{|X_n - X_k| \leq \varepsilon\}) = 1$

Prop 6 : Si $X_n \xrightarrow{p.s} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s} Y$ alors

- pour toute application continue $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $\phi(X_n) \xrightarrow{p.s} \phi(X)$
- pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha X_n + \beta Y_n \longrightarrow \alpha X + \beta Y$

Thm 7 (Borell - Cantelli) : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) < +\infty$, alors $P(A_n \text{ i.s}) = 0$
- Si les A_n sont indépendants et $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = +\infty$, alors $P(A_n \text{ i.s}) = 1$.

App 8 (Singe dactylographe) : Considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. indépendantes, de loi uniforme sur un ensemble fini Σ. Soit $m \in \Sigma^*$ un mot, de taille l. On pose $A_n = \{\omega \mid X_{nl} \cdots X_{(n+1)l-1}(\omega) = m\}$. $P(A_n) > 0$ et donc $P(A_n \text{ i.s}) = 1$.

Cor 9 : • Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$

• Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{\in\mathbb{N}} P(|X_n| \geq \varepsilon) = +\infty$

App 10 : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Alors $\frac{M_n}{\ln(n)} \xrightarrow{p.s} 1/\lambda$.

2) Convergence en probabilité

Def 11 : On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On note alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X$.

Ex 12 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles non corrélées, centrées et de même variance. Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0$.

Thm 13 : (Bernstein) : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue, et ω son module d'uniforme continuité. Pour $n \geq 1$, on pose $B_n[f](x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Alors B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$, et plus précisément,

$\|f - B_n[f]\|_\infty \leq \frac{3}{2\sqrt{n}} \omega$.

Cor 14 (Weierstrass) : L'ensemble des polynômes est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|)$

DEV 1

Prop 15 : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X$ alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X$

Prop 16 : $X_n \xrightarrow{p.s} X$ si et seulement si $\sup_{k\geq n} |X_k - X| \xrightarrow[n\to+\infty]{P} 0$.

Rem 17. La réciproque est fausse. Soit $\Omega = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la probabilité uniforme (i.e. de Lebesgue). Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $1 \leq k \leq 2^n$, posons $i = 2^n + k - 1$ et $X_i = \mathbb{1}_{](k-1)/2^n,\, k/2^n]}$. X_i ne converge pas sur un ensemble de mesure 1, mais $X_i \xrightarrow{P} 0$

Def 18: Considérons $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'ensemble des v.a.r. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, quotienté par l'égalité presque sûre. Alors $d(X,Y) = E\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right)$ est une distance.

Prop 19: $X_n \xrightarrow{P} X$ si et seulement si $d(X_n, X) \longrightarrow 0$

Thm 20: $X_n \xrightarrow{P} X$ si et seulement si de toute suite strictement croissante $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite $k_{\varphi(n)}$ telle que $X_{k_{\varphi(n)}} \xrightarrow{p.s} X$.

Cor 21: La convergence presque sûre n'est pas métrisable.

Prop 22: Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$ alors

- pour toute application continue $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(X_n) \xrightarrow{P} \phi(X)$
- pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{P} \alpha X + \beta Y$.

Thm 23: $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est complet pour d. Donc si $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p,q \geq N$, $P(|X_p - X_q| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon$, alors (X_n) converge en probabilité.

3) Convergence dans L^p

Def 24: Pour $p \in [1;+\infty[$, on note $\|X\|_p = \sqrt[p]{E(|X|^p)}$ la norme p de X. C'est une norme pour laquelle l'espace L^p, des v.a. de norme p finie, est un Banach.

Def 25: Une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p vers X si $\|X_n - X\|_p \longrightarrow 0$, ou de manière équivalente si $E(|X_n - X|^p) \longrightarrow 0$. On note alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$

Prop 26: Soit $q \leq p$. Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors $X_n \xrightarrow{L^q} X$.

Prop 27 (Markov) Soit $X \in L^p$ et $a > 0$. Alors $P(\|X\|_p > a) \leq E[\|X^p\|]/a^p$.

Cor 28: Pour tout $p \geq 1$, si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

Ex 29: La réciproque est fausse. Soit $\Omega =]0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la probabilité uniforme. Soit $\alpha > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n(\omega) = \omega^{-\alpha} \mathbb{1}_{]0,1/n]}(\omega)$. Alors $X_n \xrightarrow{P} 0$, mais $X_n \notin L^p$ si $p\alpha > 1$.

Ex 30: La convergence presque sûre n'implique pas la convergence dans L^p. Soit $\Omega = \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne. Pour $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi $(1 - n^{-p})\delta_0 + n^{-p}\delta_n$.
$X_n \xrightarrow{p.s} 0$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(|X_n|^p) = 1$.

II] Convergence en loi

Def 31: On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X (noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si pour toute fonction bornée f, $E(f(X_n)) \longrightarrow E(f(X))$

Ex 32: Soient $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$ et $X = 0$. On a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Prop 33: Soit g continue et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$.

Def 34: On note $F^X : x \longmapsto P(X \leq x)$ la fonction de répartition de X.

Thm 35 (Portemanteau): $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $F^{X_n}(x) \longrightarrow F^X(x)$ en tout point de continuité de F^X.

Def 36: On note $\varphi^X : t \longmapsto E[e^{itX}]$ la fonction caractéristique de X.

Thm 37 (Lévy) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, alors φ^{X_n} converge ponctuellement vers φ^X.
Réciproquement, si (X_n) est une suite de v.a.n dont les fonctions caractéristiques sont les $(\varphi^{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$, tel que (φ^{X_n}) converge ponctuellement vers φ continue vers l'origine, alors φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. (avec $\varphi^X = \varphi$).

Ex 38: L'hypothèse de continuité à l'origine est cruciale : en prenant $X_n \sim \mathcal{N}(0,n)$, X_n ne converge pas en loi mais (φ^{X_n}) converge ponctuellement vers $\mathbb{1}_{\{0\}}$ qui est discontinue en 0.

Prop 39: Si $X_n \xrightarrow{P} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Ex 40: La réciproque est fausse : Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = (-1)^n X$. X_n est de même loi que X, donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$; mais (X_n) ne converge pas en proba vers X.

Rem 41: Comme l'atteste l'exemple 30, même si les X_n et X sont du premier ordre, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ n'implique pas que $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.

III/ Théorèmes limite

1) Énoncés

Soit X une variable aléatoire réelle et soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. réelles. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Thm 42 (Loi faible des grands nombres pour variables du second ordre). Si les X_n sont du second ordre, deux à deux décorrélées et centrées (mais pas nécessairement identiquement distribuées).
Si $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \to 0$, alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{L^2} 0$.

App 43: Prenons $X_n \sim B(p)$. Alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{L^2} p$ (donc $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p$).

Thm 44 (Loi faible des grands nombres pour variables du premier ordre) Si les X_n sont 2 à 2 indépendantes, du premier ordre et identiquement distribuées selon la loi de X, alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^1} X$.

Thm 45 (Loi forte des grands nombres). Si les X_n sont indépendants et identiquement distribués selon la loi de X, alors $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ si et seulement si $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} E(X)$.

Ex 46: Soit f intégrable sur $[0,1]$ et (X_n) une suite de v.a. indépendantes, suivant une loi uniforme. Alors $\frac{f(X_1) + \dots + f(X_n)}{n} \xrightarrow{p.s.} \int_0^1 f(x)\,dx$.

Thm 47 (Central limite) Soit $X \in L^2$ une v.a. réelle et (X_n) une suite de v.a. réelles indépendantes, identiquement distribuées et de même loi que X. On note $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = Var(X) > 0$.
Alors $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} Z$ qui suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

App 48 (Stirling) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ via la suite $X_n \sim \Gamma(n+1, 1)$

DEV 2

2) Applications : marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

a) Sur $\mathbb{Z}$.

On considère une suite de v.a. $X_n \sim R(p)$ mutuellement indépendantes représentant une suite de déplacements aléatoires sur un axe gradué. S_n représente alors la position du marcheur au temps n.

Prop 49: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} 2p-1$, et si $p \neq \frac{1}{2}$, $P(S_n = 0 \text{ i.s.}) = 0$

Prop 50. Si $p = \frac{1}{2}$, $P(S_n = 0 \text{ i.s.}) = 1$

b) Sur $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}^3$

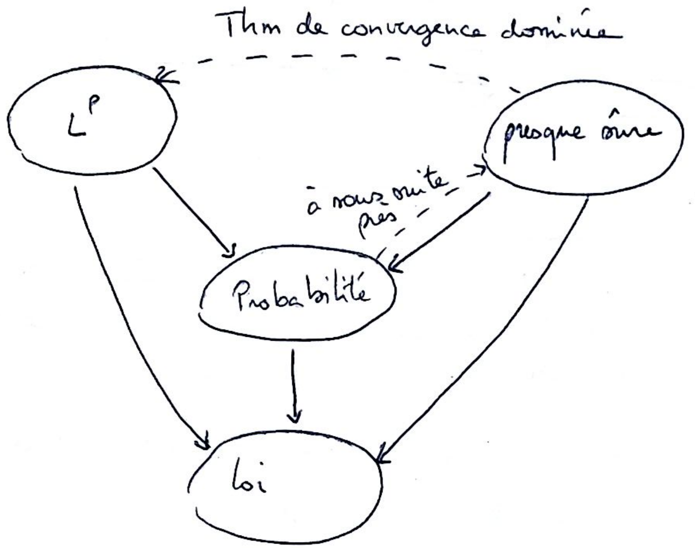
On note $e_1, \dots$ e_d la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit (X_n) une suite de v.a. dans $\{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq d\}$ de loi uniforme. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Prop 51: Si $d = 2$, $P(S_n = 0 \text{ i.s.}) = 1$

Prop 52: Si $d \geq 3$, on a $P(|S_n| \to +\infty) = 1$

Références:
- Barbé, Ledoux : Probabilités
- Ouvrard : Probabilités (Tome 2)
- Foata, Fuchs, Franchi : Calcul des probabilités

Implications entre les convergences



$\longrightarrow$ implications

$--\rightarrow$ réciproque sous conditions