253 Utilisation de la notion de convexité en analyse

I. Généralités sur les ensembles convexes et fonctions convexes

1) Ensembles convexes

Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé.

Définition 1 : Soit C une partie de E. On dit que C est un convexe si : $\forall x,y \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$.

Remarque 2 : Cela signifie que tout segment à extrémités dans C est inclus dans C.

Exemple 3 : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition 4 : Toute intersection de convexes est convexe.

Définition 5 : Soit $x_1, \dots, x_n$ des points de E, $\lambda_1, \dots \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum \lambda_i = 1$. Alors $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ est appelée combinaison convexe des x_i.

Proposition 6 : Soit C une partie de E. Alors C est convexe si et seulement si toute combinaison convexe d'éléments de C reste dans C.

2) Fonctions convexes en dimension 1

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un singleton.

Définition 7 : $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe (resp strictement convexe) si pour tous $a, b \in I$ distincts, pour tout $\lambda \in]0,1[$,
$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ (resp l'inég est stricte)

Définition 8 : On dit que f est concave si $-f$ est convexe.

Remarque 9 : f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

Proposition 10 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe si et seulement si $\forall x_1, \dots, x_n \in I$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ tq $\sum \alpha_i = 1$, on a :
$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$.

Proposition 11 : Une fonction convexe sur un ouvert est localement lipschitzienne.

Théorème 12 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Il y a équivalence entre :
(i) f est convexe
(ii) f' est croissante
(iii) La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Corollaire 13 : Si f est deux fois dérivable, alors f est convexe si et seulement si f'' est positive.

Exemple 14 : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
$\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Application 15 (Processus de Galton-Watson) : Soit $(X_{n,k})_{n,k}$ des variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}$ et intégrables. On définit $(Z_n)_n$ par $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=0}^{Z_n} X_{n,k}$.
On pose $x_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$. On étudie sa limite. Dvt 1

Application 16 : La fonction $\ln(\Gamma)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 17 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f \in L^1_{loc}(I)$. Alors f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde au sens des distributions est positive.

3) Fonctions convexes dans le cas général

E désigne un $\mathbb{R}$-evn, C un convexe de E.

Définition 17 : Soit $f : C \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur C si $\forall x,y \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a
$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Remarque 18 : La définition n'a de sens que si f est définie sur un ensemble convexe.

Exemple 19 : Si E est un espace euclidien, $x \mapsto \|x\|^2$ est strictement convexe sur E.

Proposition 20 : Soit $(f_j)_{j \in J}$ convexes sur C. S'il existe $g : C \to \mathbb{R}$ telle que $f_j \leq g$ pour tout j, alors $\sup f_j$ est convexe.

Application 21 : $f : S_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \rho(A) =$ sa plus grande val propre est une fonction convexe.

Théorème 22: Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, f différentiable sur $\mathcal{U}$. Alors il y a équivalence entre :

(i) f est convexe

(ii) $\forall x, y \in \mathcal{U}$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$

(iii) $\forall x, y \in \mathcal{U}$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0$

Si de plus f est 2 fois différentiable, on a aussi l'équivalence avec $Hf(x)$ est positive pour tout x.

Remarque 23: Si $\mathcal{U}$ n'est pas ouvert, c'est faux.
~~$f(x,$~~ $f: \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ est convexe mais $Hf(x,y)$ n'est pas positive.

Application 24: Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante: $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe si et seulement si A est positive.

II. Inégalités de convexité

1) Inégalités classiques

Théorème 25 (Inégalité arithmético-géométrique)

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \text{ où } x_1, \dots, x_n > 0.$$

Lemme 26 (Inégalité d'Young): Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$, $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2) Inégalités dans les L^p

Soit X un espace mesuré de mesure μ.

Théorème 27 (Inégalité de Hölder): Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient f, g des fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. On a : $\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$

Remarque 28: Si $p = 1$ et $q = +\infty$, cette inégalité reste vraie sous forme de normes.

Théorème 27 (Inégalité de Minkowski): Soit $1 \leq p < +\infty$, f, g mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. Alors :

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Remarque 28: Cela permet de montrer que $\|\cdot\|_p$ est bien une norme pour $p \geq 1$, et pour $p = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 29: Soit $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$, $1 \leq p < q < \infty$. Alors pour tout $r \in [p, q]$, $f \in \mathcal{L}^r$.

Proposition 30: Si X est de mesure finie, et $p < q \leq +\infty$, $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$.

3) Inégalité de Jensen

Proposition 31: Toute fonction convexe réelle est un sup de fonctions affines.

Proposition 32 (Inégalité de Jensen): Supposons que μ est de masse 1. Soit $f \in L^1_\mu$, φ convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors : $\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu$.

Proposition 33 (Inégalité de Jensen conditionnelle) : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{G}$ une tribu incluse dans $\mathcal{A}$, X une v.a.r L^1, et φ convexe réelle. Alors :

$$\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{G}].$$

Application 34: Si $(M_n)_n$ est une martingale, $(M_n^+)_n$ est une sous-martingale

III. Applications en analyse fonctionnelle

1) Théorème de projection

On se place dans un Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Théorème 35 (Projection sur un convexe fermé) : Soit C un convexe non vide fermé de H. Alors pour tout $x \in H$,

il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $\|x - p_C(x)\| = d(x, C)$.
De plus, $p_C(x)$ est caractérisé par :

$$p_C(x) \in C \text{ et pour tout } z \in C, \ \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

Proposition 36 : p_C est 1-lipschitzienne, donc continue.

Proposition 37 : Soit F un sev fermé de H. Alors p_F est linéaire de H sur F, et si $x \in H$, $p_F(x)$ est caractérisé par $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

Corollaire 38 : Soit F un sev fermé. $H = F \oplus F^{\perp}$.

Corollaire 39 : Soit F un sev de H. Alors F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

Application 40 : Densité des polynômes orthogonaux.

2) Dualité

Théorème 41 (Riesz) : Soit $f \in H'$. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$, $f(v) = \langle u, v\rangle$.

dev n° 2

Théorème 42 (Stampacchia) : Soit C un convexe fermé non vide de H Hilbert réel. Soit a une forme bilinéaire continue coercive sur C, L une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $u \in C$ tel que

$\forall y \in C, \ a(u, y-u) \geq L(y-u)$.

De plus, si a est symétrique, u est caractérisé par :
$u \in C$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = \min\left(\frac{1}{2}a(y,y) - L(y)\right)$.

Corollaire 43 (Lax-Milgram) : Soit a bilinéaire continue sur H, $L \in H'$. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que :
$\forall y \in H, \ a(u,y) = L(u)$.
De plus, si a est symétrique, u est caractérisé par :
$u \in H$, et $\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = \min\left(\frac{1}{2}a(y,y) - L(y)\right)$.

Application 42 : Existence, unicité de solutions d'EDP elliptiques en dimension 1.

3) Hahn-Banach

Théorème 43 (Hahn-Banach géométrique) : Soit H un Hilbert réel. Soit C un convexe fermé non vide de H. Si $x \notin C$, il existe $f \in H'$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
$\forall y \in C, \ f(x) < \alpha < f(y)$.

Corollaire 44 : Soient A, B deux convexes fermés non vides disjoints tels que A est compact. Alors $\exists f \in H'$ tel que $\sup_A f < \inf_B f$.

IV. Optimisation convexe

Soit C un convexe non vide d'un $\mathbb{R}$-evn E, f une application convexe sur C.

Proposition 45 : L'ensemble des points réalisant le minimum de f est convexe.

Proposition 46 : Soit f une application strictement convexe sur C. Alors il existe au plus un point minimisant f sur C.

Proposition 47 : On suppose C ouvert, f différentiable sur C. Alors $x \in C$ est un minimum de f si et seulement si $df(x) = 0$.

Remarque 48 : La réciproque n'est pas vraie si f n'est pas convexe. Ex : $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 49 (Méthode de descente de gradient) : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ strictement convexe. On suppose ∇f lipschitzien. Soit $t > 0$. On définit la suite $(x_n)_n$ par
$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k - t\nabla f(x_k) \end{cases}$. On suppose que f admet un minimum en x^*. Alors pour t assez petit, $(x_n)_n$ converge vers x^*.