253 — Utilisation de la notion de convexité en analyse.

I - Convexité en géométrie

A) Outils

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel

Déf: Une partie C de $\mathbb{E}$ est convexe si pour tout $(x;y)\in C^2$ $[x;y]\subset C$, soit $\forall t\in[0;1]$ $(tx+(1-t)y)\in C$.

Ex: • Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
• Une boule est convexe (quelque soit la norme)

Prop: • Si $(A_i)_{i\in I}$ sont des convexes de $\mathbb{E}$, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est convexe.
• Si $(\mathbb{E}_i)_{i\in I}$ est une famille d'espace vectoriel et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de convexe telle que $\forall i\in I$ $A_i\subset \mathbb{E}_i$ alors $\prod_{i\in I} A_i$ est un convexe de $\prod_{i\in I} E_i$.
• Si A et B sont deux convexes de $\mathbb{E}$, $A+B$ est convexe où $A+B=\{a+b\ /\ (a,b)\in A\times B\}$.

Ex: • Épaississement d'un convexe A: $A+B(0;\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.
• Translaté d'un convexe A: $A+\{x_0\}$, $x_0\in\mathbb{E}$.

Déf: Soit C un convexe de $\mathbb{E}$ tel que $0\in\mathring{C}$. On appelle jauge de C l'application $j:\mathbb{E}\to\mathbb{R}_+$ définie par:
$j(x)=\inf\{\alpha>0\ /\ \frac{x}{\alpha}\in C\}$

Ex: Si $C=B(0;r)$, $r>0$, $j(x)=\frac{\|x\|}{r}$.

Prop: Soit C un convexe de $\mathbb{E}$ avec $0\in\mathring{C}$.
• $\forall(\lambda;x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{E}$ $j(\lambda x)=\lambda j(x)$
• $\{x\in\mathbb{E}\ /\ j(x)=1\}=\partial C$, $\{x\in\mathbb{E}\ j(x)<1\}=\mathring{C}$
• $\forall(x;y)\in C^2$ $j(x+y)\leq j(x)+j(y)$
• j est continue.

Appli: • Soit C un convexe borné de $\mathbb{E}$ avec $\mathring{C}\neq\emptyset$. Alors il existe un homéomorphisme f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ tel que $f(\bar{C})=B(0;1)$ et $f(\partial C)=\partial B(0;1)$.
• Soit C un compact convexe de $\mathbb{E}$, symétrique avec $0\in\mathring{C}$. Alors j est une norme sur $\mathbb{E}$ et la boule unité fermé associée est C.

Prop: Un convexe engendrant affinement l'espace est d'intérieur non vide.

Cor: Soit C un convexe de $\mathbb{E}$. Dans l'espace affine qu'il engendre, C est d'intérieur non vide.

Déf: Soit S une partie de $\mathbb{E}$. On définit l'enveloppe convexe de S, $co(S)$ comme étant le plus petit convexe contenant S.
$co(S)=\bigcap_{\substack{C \text{ convexe}\\ S\subset C}} C$.

Prop: Soit $S\subset\mathbb{E}$. $co(S)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de points de S.

Ex: Soit $(a;b)\in\mathbb{E}^2$. $co(\{a;b\})=[a;b]$.
Théorème de Gauss-Lucas: $P\in\mathbb{C}[X]$ de racines $(z_i)_{i\in I}$. Les racines de P' sont dans $co((z_i)_{i\in I})$

Th: (Carathéodory)
Soit $S\subset\mathbb{R}^N$. Alors $co(S)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de $N+1$ points de S. [BRE]

Appli: L'enveloppe convexe d'un compact est compact

Ex: $co(O_n(\mathbb{R}))$ est compact.

B) Théorèmes de Séparation

Th: (Projection).
Soit H un Hilbert et $C\subset H$ un convexe fermé. [BRE]
$\forall x\in H$ $\exists!$ $p_C(x)\in C$ $\|x-p_C(x)\|=\min_{y\in C}\|x-y\|$.
De plus $\forall y\in C$ $\langle x-p_C(x);y-p_C(x)\rangle\leq 0$ et p_C est 1-lipschitzienne

Appli: Soit $(\Omega;\mathcal{A};P)$ un espace mesuré et $X\in L^2(\Omega;\mathcal{A};P)$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. on peut définir $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ l'espérance conditionnelle de X comme $p_{L^2(\Omega;\mathcal{B};P)}(X)$

Th: Soit H un Hilbert et A et B deux convexes disjoints de H. [SCH]
• Si A est ouvert il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large. i.e. $\exists f\in H'$ $\sup_A f\leq\inf_B f$
• Si A est fermé et B compact, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict
i.e. $\exists f;\alpha\in H'\times\mathbb{R}$ $\sup_A f\leq\alpha-\varepsilon\leq\alpha+\varepsilon\leq\inf_B f$, $\varepsilon>0$

Rq: Si H est un evn, ces théorèmes restent vrais et découlent du théorème de Hahn-Banach. [BRE]

Appli: Si F est un sev de H, $(F^\perp=\{0\}\Leftrightarrow \bar{F}=\mathbb{E})$.

Appli : Un convexe fermé fort est un convexe fermé faible car un convexe fermé fort est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent.

Appli : Soit C un convexe de $\mathbb{R}^N$ et $x_0 \in \partial C$. Alors il existe H un hyperplan, dit d'appui, contenant x_0 tel que C soit contenu dans un demi-espace fermé délimité par H.

Appli : Soit X une variable aléatoire de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans C un convexe. Alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ est à valeurs dans C.

C) Points extrémaux

Déf : Soit C un convexe de E et $x \in C$. x est dit extrémal si $C \setminus \{x\}$ est convexe. De manière équivalente, si $(y,z) \in C^2$ et $x \in]y,z[$ alors $y = z = x$.

Ex : 1 est un point extrémal de $[0,1]$, $\frac{1}{2}$ n'en est pas un.

Prop : Soit C un convexe de $\mathbb{R}^N$ et H un hyperplan d'appui. Si x est un point extrémal de $C \cap H$, x est un point extrémal de C.

Th : Krein-Milman
Soit C un convexe de $\mathbb{R}^N$ compact. C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Ex : Théorème de Birkhoff (L'ensemble des matrices bistochastiques est l'enveloppe convexe des matrices de permutations).

Appli : Une fonction affine est minimisée sur un compact convexe en un de ses points extrémaux (programmation linéaire).

II - Les fonctions convexes

A) Approche générale

Déf : Soit C un convexe de E et $f : C \to E$.
f est dite convexe sur C si
$\forall t \in [0,1]\ \forall (x,y) \in C^2\ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
strictement convexe sur C si
$\forall t \in]0,1[\ \forall (x,y) \in C^2, x \neq y, f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$

Rq : Une norme n'est jamais strictement convexe en tant que fonction convexe mais est convexe.

Prop : Une fonction est convexe si et seulement son épigraphe est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$
$epi(f) = \{(x,r) \in C \times \mathbb{R} \,/\, f(x) \leq r\}$

Prop : Une somme de fonctions convexes est une fonction convexe, un supremum de fonctions convexes est une fonction convexe.

Prop : une fonction convexe est le sup des fonctions affines qui la minorent

Prop : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $C \subset \Omega$ un convexe et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable.
f est convexe sur C si et seulement si :
$\forall (x,y) \in C^2\quad f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$
c'est à dire, f est au dessus de ses hyperplans tangents.

Prop : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $C \subset \Omega$ un convexe et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable.
f est convexe sur C si et seulement si : ∇f est monotone sur C i.e. $\forall (x,y) \in C^2\ \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$.
f est strictement convexe sur C si et seulement si ∇f est strictement monotone sur C, i.e. $\forall (x,y) \in C^2\ x \neq y, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle > 0$

Ex : $x \mapsto \exp(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto x\log(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

Prop : Soit $\varphi : K \to \mathbb{R}$ une fonction convexe où K est un cône convexe de $\mathbb{R}^N$. Alors $(x,y) \mapsto y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ est convexe sur $K \times \mathbb{R}_+^*$.

Prop : Soit C un convexe de $\mathbb{R}^N$ et $f : C \to \mathbb{R}^N$ une fonction convexe
Soit $k \geq 1$. $\forall (x_1, \dots, x_k) \in C^k\ \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{R}_+)^k, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$,
$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i)$.

Appli : Inégalité arithmético-géométrique :
Soit $n \geq 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Alors $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$

Physique statistique : Si $(u_1, \dots, u_N) \in (\mathbb{R}_+)^N$ avec $\sum_{i=1}^N u_i = N$
l'entropie de u, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N u_i \ln(u_i)$, est positive.

Théorème : inégalité de Jensen
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $g : X \to I$ une fonction intégrable telle que $f \circ g$ soit intégrable. Alors
$f\left(\int_X g\,d\mu\right) \leq \int_X f \circ g\,d\mu$

Appli : Soit $f : X \to \mathbb{R}_+$ positive. L'entropie de f, $\int_X f \ln(f)\,d\mu - \int_X f\,d\mu \ln\left(\int_X f\,d\mu\right)$, est positive.

B) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction

Prop: f est convexe sur I si et seulement si : pour tout $x_0 \in I$ $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$

Prop: Si f est convexe, alors f est continue. (pour I ouvert)

Contre-ex : $f : [0;1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ si $x \neq 0$, $0 \mapsto 1$ est convexe mais pas continue.

Prop: Si f est convexe et I ouvert, alors f admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de I. L'ensemble des points en lesquels f n'est pas dérivable est au plus dénombrable.

contre-ex: $x \mapsto |x|$ est convexe mais non dérivable en 0.

C) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^N$

Soit C un convexe de $\mathbb{R}^N$ et $f : C \to \mathbb{R}$ convexe

Th: Si C est ouvert et f bornée alors pour toute partie $K \subset C$ telle qu'il existe $\varepsilon > 0$, $K + B(0;\varepsilon) \subset C$, f est lipschitzienne sur K.

Th: Si C est ouvert alors f est continue sur C et lipschitzienne sur tout compact de C.

[R] **Cor:** Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur $\mathbb{R}^N$ convergeant simplement vers f. Alors f est convexe et la convergence est uniforme sur tout compact.

Prop: Si C est ouvert, $x \in C$ et si f admet des dérivées partielles en x alors f est différentiable en x.

Th: Si C est ouvert, alors f est différentiable presque partout sur C.

Prop: Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est convexe et majorée alors f est constante.

Prop: Si f est strictement convexe et atteint son minimum sur C, alors le minimiseur est unique (c'est encore vrai dans un evn)

Appli: Soit H un Hilbert, C un convexe fermé de H, a bilinéaire continue, symétrique et coercive et $L \in H'$. il existe une unique solution au problème $\inf_{u \in C} \{\frac{1}{2}a(u,u) - L(u)\}$

Prop: Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante et si $f(C) \subset J$ alors $\varphi \circ f$ est convexe.

Cor: Si $f(C) \subset \mathbb{R}_+^*$ et si f est log-convexe alors f est convexe.

Prop: Si f et g sont log-convexe, fg est log-convexe, donc convexe.

Ex: det est log-concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

III - Utilisation des fonctions convexes et des ensembles convexes en analyse

A) Géométrie des espaces L^p.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1; +\infty]$ et p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Th: Inégalité de Hölder
Soit $(f;g) \in \mathcal{L}^p(\mu) \times \mathcal{L}^q(\mu)$. Alors $\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^{p'} d\mu\right)^{1/p'}$

Cor: Inégalité de Minkowski
$f \mapsto \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ est une norme sur $L^p(\mu)$.

Th: Inégalités de Hanner. Soit $(f;g) \in \mathcal{L}^p(\mu) \times \mathcal{L}^p(\mu)$, $p \neq \infty$

si $1 \leq p \leq 2$ $(\|f\| + \|g\|)^p + |\|f\| - \|g\||^p \leq \|f+g\|^p + \|f-g\|^p$

si $p \geq 2$ $(\|f\| + \|g\|)^p + |\|f\| - \|g\||^p \geq \|f+g\|^p + \|f-g\|^p$) DVP 1.

Cor: Si $p \in]1; +\infty[$, la norme $f \mapsto \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ sur $L^p(\mu)$ est uniformément convexe, i.e. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (f,g) \in L^p(\mu)^2$ $(\|f\| = 1, \|g\| = 1$ et $\|\frac{f+g}{2}\| > 1 - \delta) \Rightarrow (\|f-g\| < \varepsilon)$

Th: Soit $p \in]1; +\infty[$. Le dual de $L^p(\mu)$ s'identifie à $L^{p'}(\mu)$.

B) Topologie faible et calcul des variations

Prop Les convexes fermés forts sont exactement les convexes fermés faibles.

Appli: $\overline{L^2(\Omega; K)}^w = L^2(\Omega; \overline{co}(K))$) DVP 2

Théorème : H Hilbert
$C \subset H$ convexe fermé
$f : C \to \mathbb{R}$ coercive, convexe et sci
Alors f admet un point minimum sur C.

Appli : Résolution d'EDP : si Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ $f \in L^2(\Omega)$ alors $\exists! u \in H_0^2(\Omega)$,
$$\Delta^2 u + u = f$$

[BER] M. BERGER, Géométrie, T2
[BRÉ] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications
[SCH] R. SCHNEIDER, convex bodies, the Brunn-Minkowski theory, Cambridge University Press, 1993.
[HIR] J-B Hiriart-Urruty, C. LEMARÉCHAL, convex analysis and minimization algorithms I. Springer-Verlag, 1996
[TEX] Rozenn Texier-Picard. Convexité et applications.

Développement : Inégalités de Hanner
Binôme : Léo Bigorgne et Joackim Bernier
Référence :

— Cours : *Intégration et Analyse de Fourier* de Cédric Villani page 264.

— *Analyse fonctionnelle élémentaire* de Michel Willem. (**à vérifier**)

Contexte :

— (Ω, μ) un espace mesuré.
— $1 \leq p < \infty$.

Théorème : Soient f et g deux fonctions de $L^p(\Omega, \mu)$:

— si $1 \leq p \leq 2$ alors

$$(\frac{||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}}{2})^p + |\frac{||f||_{L^p} - ||g||_{L^p}}{2}|^p \leq ||\frac{f+g}{2}||^p_{L^p} + ||\frac{f-g}{2}||^p_{L^p},$$

— si $2 \leq p < \infty$ alors

$$(\frac{||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}}{2})^p + |\frac{||f||_{L^p} - ||g||_{L^p}}{2}|^p \geq ||\frac{f+g}{2}||^p_{L^p} + ||\frac{f-g}{2}||^p_{L^p}.$$

Lemme préliminaire :
Si ϕ est une fonction convexe (respectivement concave) de $\mathbb{R}^n_+$. Alors $\Phi(x,y) = y\phi(\frac{x}{y})$ est une fonction convexe (respectivement concave) de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^*_+$.
démonstration :
Puisque Φ est homogène ($\Phi(\alpha z) = \alpha\Phi(z)$), il suffit de montrer qu'elle est sous-additive.
Or

$$\begin{aligned}\Phi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &:= (y_1 + y_2)\phi(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}) \\ &= (y_1 + y_2)\phi(\frac{y_1\frac{x_1}{y_1} + y_2\frac{x_2}{y_2}}{y_1 + y_2}) \\ &\leq y_1\phi(\frac{x_1}{y_1}) + y_2\phi(\frac{x_2}{y_2}) \\ &= \Phi(x_1, y_1) + \Phi(x_2, y_2).\end{aligned}$$

Lemme principal :
La fonction $\begin{array}{cccc}\Phi & : & \mathbb{R}^2_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & (x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}})^p + |x^{\frac{1}{p}} - y^{\frac{1}{p}}|^p\end{array}$ est convexe si $p \leq 2$ et concave si $p \geq 2$.
démonstration :
On remarque que le cas $p = 1$ est immédiat, on suppose donc $p \neq 1$.
On pose $\phi(x) = \Phi(x, 1)$. On constate que ϕ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*_+ - \{1\}$. Pour connaitre sa convexité il suffit donc de déterminer le signe de sa dérivée seconde. Le calcul de la dérivée est immédiat (on note $y = x^{\frac{1}{p}}$ pour être lisible) :

$$\phi'(x) = x^{\frac{1}{p}-1}((y+1)^{p-1} + sg(y-1)|y-1|^{p-1})$$

La dérivée seconde est :

$$\phi''(x) = -\frac{p-1}{p}x^{\frac{1}{p}-2}((y+1)^{p-1} + sg(y-1)|y-1|^{p-1}) + \frac{p-1}{p}(x^{\frac{1}{p}-1})^2((y+1)^{p-2} + |y-1|^{p-2})$$

Pour la factoriser, on transforme le premier terme (il s'agit surtout de voir que $sg(y-1)|y-1|^{p-1} = (y-1)|y-1|^{p-2}$) :

$$(y+1)^{p-1} + sg(y-1)|y-1|^{p-1} = y[(y+1)^{p-2} + |y-1|^{p-2}] + (y+1)^{p-2} - |y-1|^{p-2}.$$

Ce qui conduit à avoir :

$$\phi''(x) = -\frac{p-1}{p}x^{\frac{1}{p}-2}((y+1)^{p-2} - |y-1|^{p-2}).$$

Mais alors puisque $(y+1) \geq |y-1|$, ϕ est convexe si $p \leq 2$ et ϕ est concave sinon.
On en déduit le résultat voulu sur Φ en appliquant le lemme préliminaire puisque $\Phi(x,y) = y\phi(\frac{x}{y})$.

Démonstration du théorème :
On montre le résultat pour $1 \leq p \leq 2$ le second cas étant symétrique (on remplace convexe par concave).
On montre d'abord le résultat pour un espace probabilisé. En effet, l'inégalité de Jensen permet d'écrire, puisque Φ est convexe, que :

$$\Phi\Big(\int |f|^p \, d\mu, \int |g|^p \, d\mu\Big) \;\leq\; \int \Phi(|f|^p, |g|^p) \, d\mu.$$

Le membre de gauche est exactement (au facteur 2^p près) celui du théorème, pour reconnaitre celui de droite on remarque qu'en comparant les signes de f et g :

$$\Phi(|f|^p, |g|^p) = (|f| + |g|)^p + ||f| - |g||^p = (f+g)^p + |f-g|^p.$$

On reconnait donc aussi le membre de droite.

Pour un espace de mesure finie, le résultat se déduit immédiatement de l'étape précédente car l'inégalité est homogène de degré 1 par rapport à la mesure.

Dans le cas général, on applique l'inégalité pour les mesures :

$$\mu_n = \mathbb{1}_{|f|^p+|g|^p > 2^{-n}} d\mu,$$

ces dernières étant finies car par Markov :

$$|\mu_n| = \int \mathbb{1}_{|f|^p+|g|^p > 2^{-n}} \, d\mu \leq 2^n(||f||^p_{L^p} + ||g||^p_{L^p}),$$

puis on passe à la limite grâce au théorème de convergence monotone.
Applications et remarques :

- Ces inégalités sont une généralisation de l'identitée du parallélogramme.
- Elle est plus forte que l'inégalité de Clarkson (dans le cas où $2 \leq p$, on utilise la concavité de ϕ en 1 pour linéarisé le membre de gauche de l'équation).
- Elles donnent une estimation explicite du module d'uniforme convexité des espaces L^p (mais ce n'est pas trivial).

Développement : $\overline{L^2(\Omega;K)}^W = L^2(\Omega;\overline{conv(K)})$
Binôme : Léo Bigorgne et Joackim Bernier
Référence : Nonlinear analysis and mechanic. *Heriot-Watt Symposium.* volume IV page 140 théorème 3. (article de L. Tartar).
Contexte :
- Ω un borélien de $\mathbb{R}^N$.
- K une partie de $\mathbb{R}^m$.

Théorème : Si Ω est borné alors :

$$\overline{L^2(\Omega;K)}^W = L^2(\Omega;\overline{conv(K)}).$$

Remarque : Le résultat reste vrai si $|\Omega| = \infty$ mais il faut de plus supposer que $L^2(\Omega;K) \neq \emptyset$.
Prérequis :
- Dans un espace de Hilbert les convexes fermés forts sont des fermés faibles.
- De toute suite convergeant fortement, on peut extraire une sous suite convergeant presque partout.
- Un convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés dans lesquels il est contenu.
- L'espace des fonctions continues à support compact est dense dans L^2.

La démonstration :
"$\subset$" : On commence par montrer que $L^2(\Omega;\overline{conv(K)})$ est un fermé de la topologie forte. Soit $f_n \in L^2(\Omega;\overline{conv(K)})$. On suppose que $\underline{f_n}$ converge vers f dans L^2. Alors il existe une sous suite (n_i) telle que f_{n_i} converge vers f presque partout. Puisque $\overline{conv(K)}$ est fermé on peut passer à la limite en faisant attention à l'intervertion de symboles :

$$\forall i,\ f_{n_i}(x) \in \overline{conv(K)}\ pp\ et\ f_{n_i}(x) \xrightarrow[i\to\infty]{} f(x)\ pp \Rightarrow (\forall i, f_{n_i}(x) \in \overline{conv(K)}\ et\ f_{n_i}(x) \xrightarrow[i\to\infty]{} f(x))\ pp.$$

Donc $f \in L^2(\Omega;\overline{conv(K)})$. Puisque, de plus, $L^2(\Omega;\overline{conv(K)})$ est convexe, il est fermé pour la topologie faible. Ainsi $\overline{L^2(\Omega;K)}^W \subset L^2(\Omega;\overline{conv(K)})$.
"$\supset$" On montre d'abord le résultat pour $\Omega = [0,1[^N$.
On cite un lemme classique sur la convergence simple des opérateurs linéaires :
lemme : Si $P_n \in \mathcal{L}(E;F)$ est une suite bornée d'opérateurs, $P \in \mathcal{L}(E;F)$, $\mathcal{D} \subset E$ est dense et si

$$\forall x \in \mathcal{D},\ P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P(x),$$

alors

$$\forall x \in E,\ P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P(x).$$

On introduit quelques notations :

$$\begin{cases} \Delta_n := [0,2^{-n}[^N, \\ T_n := (\mathbb{Z}_n[\frac{1}{2}] \cap [0,1[)^N, \\ \mathcal{F}_n := \sigma(T_n + \{\Delta_n\}). \end{cases}$$

Significations des notations :
- $T_n + \{\Delta_n\}$ est la partition de Ω par les pavés de taille 2^{-n}.
- $L^2(\Omega,\mathcal{F}_n;\mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur cette partition.
- si $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ alors $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n](i+\Delta_n) = \frac{1}{|\Delta_n|}\int_{i+\Delta_n} f(x)\,dx$.

On remarque que si $f \in \mathcal{C}_0^0(\Omega)$ alors $|\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n] - f| \leq \omega_f(2^{-n})$ où ω_f est le module de continuité de f. f étant uniformément continue par Heine, $\mathbb{E}[f_n|\mathcal{F}_n]$ converge vers f en norme uniforme et donc a fortiori en norme L^2. De plus $\mathbb{E}[.|\mathcal{F}_n]$ est une projection orthogonale donc sa norme est inférieure à 1. Donc par application du lemme,

$$\forall f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^m),\ \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n] \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f.$$

Par conséquent $\cup_{n\in\mathbb{N}} L^2(\Omega,\mathcal{F}_n;\mathbb{R}^m)$ est dense dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Soit A une partie finie de K et $X \in L^2(\Omega;A)$. On prolonge X à $\mathbb{R}^N$ par périodicité. Et on pose $X_n(x) = X(2^n x)$ pour montrer que $X_n \rightharpoonup \mathbb{E}(X)$.
On constate pour cela que si $n \geq k$ alors X_n est indépendante de $\mathcal{F}_k$. En effet, si $i,j \in T_k$, alors $2^n i \in \mathbb{N}^N$ donc $X_n(x+i) = X(2^n(x+i)) = X(2^n x) = X_n(x)$ ainsi

$$\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{i+\Delta_k}] := \int_{i+\Delta_k} X_n(x)\,dx = \int_{\Delta_k} X_n(x)\,dx = \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\Delta_k}] = \frac{\mathbb{E}[X_n]}{\#T_k} = \mathbb{E}[X_n]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Delta_k}].$$

De plus X_n et X ont même moyenne car par changement de variable :

$$\mathbb{E}[X_n] = \#T_n \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\Delta_n}] = \#T_n \int_{\Delta_n} X(2^n x)\, dx = 2^{nN} \#T_n \int_\Omega X(x)\, dx = \mathbb{E}[X].$$

Donc si $\phi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_k; \mathbb{R}^m)$ et $n \geq k$:

$$\forall \phi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_k; \mathbb{R}^m),\ n \geq k \Rightarrow \mathbb{E}[\phi . X_n\ ] = \mathbb{E}[\phi].\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\phi].\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\phi.\mathbb{E}[X]].$$

On peut donc appliquer le lemme à l'opérateur $P_n = \mathbb{E}[X_n .]$ (borné puisque A est borné) et à la partie dense $\cup_{k\in\mathbb{N}} L^2(\Omega, \mathcal{F}_k; \mathbb{R}^m)$. Ainsi pour tout $\phi \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $\mathbb{E}[\phi.X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[\phi.\mathbb{E}[X]]$, c'est à dire $X_n \rightharpoonup \mathbb{E}(X)$.
Or on remarque que $X_n \in L^2(\Omega; K)$ donc $\mathbb{E}[X] \in \overline{L^2(\Omega;K)}^W$.

On vient de montrer que $conv(K) \subset \overline{L^2(\Omega;K)}^W$. Il est donc immédiat que $\overline{conv(K)} \subset \overline{L^2(\Omega;K)}^W$. Puisque l'application $f \mapsto (f_{|i+D_k})_{i\in T_k}$ est un homéomorphisme pour la topologie faible, on étend ce résultat aux fonctions constantes par morceaux :

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} L^2(\Omega, \mathcal{F}_n; \overline{conv(K)}) \subset \overline{L^2(\Omega;K)}^W.$$

Il ne reste alors plus qu'à préciser le résultat de densité, en remarquant que si $f \in L^2(\Omega; \overline{conv(K)})$ alors $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_n; \overline{conv(K)})$. En effet, si $\overline{conv(K)}$ est contenu dans le demi espace $\{\phi - a \geq 0\}$ alors puisque $(\phi - a)\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(\phi - a)(f)|\mathcal{F}_n] \geq 0$, $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_n]$ appartient (partout) à tout demi espace contenant $\overline{conv(K)}$. Il appartient donc (partout) à $\overline{conv(K)}$.
Ainsi $\cup_{n\in\mathbb{N}} L^2(\Omega, \mathcal{F}_n; \overline{conv(K)})$ est dense dans $L^2(\Omega; \overline{conv(K)})$ pour la topologie forte (et donc pour la topologie faible). Puisque l'inclusion " $\subset$ " a déjà été démontrée alors :

$$\overline{L^2(\Omega;K)}^W = L^2(\Omega; \overline{conv(K)}).$$

Fin du développement.
Remarque : On peut généraliser le résultat à Ω quelconque en montrant que l'on peut toujours se ramener au cas $\Omega = [0,1]^N$.

Si Ω est un borélien borné de $\mathbb{R}^N$: $\forall x \in \Omega,\ |x| \leq C$. Alors si $f \in L^2(\Omega; \overline{conv(K)})$, on définit g sur $[0,1]^N$ par :

$$\begin{cases} a \in K, \\ g(x) = f(Cx)\ si\ Cx \in \Omega, \\ g(x) = a\ sinon. \end{cases}$$

Donc en applicant le résultat à $[0,1]^N$, il existe $g_n \in L^2([0,1]^N; K)$ tel que $g_n \rightharpoonup g$, il suffit enfin de constater que par changement de variables $f_n(x) = g_n(Cx)$ convient.

Si Ω n'est pas borné mais de volume fini alors en appliquant le cas où Ω est borné, les fonctions g de la forme

$$\begin{cases} a \in K, \\ g(x) = f(x)\ si\ x \in \Omega \cap B(0,C), \\ g(x) = a\ sinon. \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\Omega \cap B(0,C); \overline{conv(K)})$ sont dans $\overline{L^2(\Omega;K)}^W$. Or il s'agit d'une partie dense de $L^2(\Omega \cap B(0,C); \overline{conv(K)})$ (par convergence dominée).

Si Ω est de volume infini alors $0 \in \overline{K}$ (par Markov...). On peut donc montrer que les fonctions de la forme

$$\begin{cases} g(x) = f(x)\ si\ x \in \Omega \cap B(0,C), \\ g(x) = 0\ sinon. \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\Omega \cap B(0,C); K)$ sont dans $\overline{L^2(\Omega;K)}^W$. On peut alors faire la même démonstration que précédement.