249 Suite de variables de Bernoulli indépendantes

Introduction: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $p \in [0,1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $P(X=1) = 1 - P(X=0) = p$. On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.
X suit une loi de Rademacher de paramètre p si $P(X=1) = 1 - P(X=-1) = p$

Pour $X \sim \mathcal{B}(p)$, on a $E[X] = p$ et $Var(X) = p(1-p)$.
La loi de Bernoulli modélise un lancer de pile ou face avec une pièce qui n'est pas forcément équilibrée

I- Construction d'une suite de variables aléatoires indépendantes

1) Indépendance. [OU1] p 54-58

Définition 1. • Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. Les $(A_i)_{i\in I}$ sont dits indépendants si pour toute sous-famille finie non vide $(A_j)_{j\in J}$ des $(A_i)_{i\in I}$, $P(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} P(A_j)$

• Soit une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires à valeurs dans des espaces probabilisables respectifs $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Les $(X_i)_{i\in I}$ sont indépendantes si pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ telle que pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{E}_i$, les événements $(X_i \in A_i)_{i\in I}$ sont indépendants

Remarque 2. L'indépendance d'événements n'est pas équivalente à l'indépendance deux à deux.

Exemple 3: On lance un dé équilibré à 4 faces et on lit le résultat obtenu. On pose $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{1,4\}$.
Alors $P(A\cap B) = P(A\cap C) = P(B\cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C)$
A, B et C sont deux à deux indépendants mais :

$$P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

Donc A, B et C ne sont pas indépendants.

2) Construction d'une suite de v.a indépendantes [OU2] p 54-58

Définition 4. Soit $x \in [0,1[$. On définit par récurrence les suites $(D_n(x))$ et $(R_n(x))$ par:

$$\begin{cases} R_0(x) \\ D_n(x) = \lfloor 2R_{n-1}(x) \rfloor \text{ et } R_n(x) = 2R_{n-1}(x) - D_n(x) \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

$\forall n \geq 1$, $D_n(x) \in \{0,1\}$ et $R_n(x) \in [0,1[$.
$(D_n(x))_{n\geq 1}$ est le développement dyadique de x et on a $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{D_j(x)}{2^j}$

Remarque 5. Le développement dyadique de x est unique, sauf quand x est de la forme $\frac{p}{2^q}$. Dans ce cas x admet deux développements dyadiques, un fini et un infini. On choisit alors le développement fini.

Proposition 6. Si on munit $[0,1[$ de la tribu $\mathcal{B}([0,1[)$ et de la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1[$ et notée λ, les $(D_n)_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a i.i.d) de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Corollaire 7. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$ indépendants telles que : $\forall n \geq 1, \quad X_n \sim \mu_n$.

En particulier on peut construire une suite de v-a iid de loi $\mathcal{B}(p)$ pour tout $p \in [0,1]$.

II - Lois associées

1) Loi binomiale

Définition 8. Soit $X_1, \dots, X_n$, n v-a iid de loi $\mathcal{B}(p)$. $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p. S_n représente le nombre de faces obtenus après n lancers.

On note $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ et on a:

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \ P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ E[S_n] = np \\ Var(S_n) = np(1-p) \end{cases}$$

2) Loi géométrique et loi binomiale négative [OU] p104-105

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v-a iid de loi $\mathcal{B}(p)$. On définit par récurrence la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par:

$$\begin{cases} T_1 = \inf \{ k \geq 1 \mid X_k = 1 \} \\ T_{n+1} = \inf \{ k > T_n \mid X_k = 1 \} \end{cases}$$

Proposition 9. En posant $T_0 = 0$, la suite $(T_n - T_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a iid de loi géométrique de paramètre p $\mathcal{G}(p)$.

On a: $\quad \forall n \geq 1, k \in \mathbb{N}, P(T_n - T_{n-1} = k) = p(1-p)^k$

De plus T_n suit une loi binomiale négative de paramètres n et p. On note $T_n \sim \mathcal{B}^-(n,p)$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

3) Loi de Poisson [OU2] p 321-322

Théorème 10. (de Poisson)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une v.a de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$ telle que $np_n = \lambda > 0$

Alors $\quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

Théorème 11 (des événements rares)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(A_{n,j})_{1\leq j\leq M_n}$ une famille d'événements indépendants. On pose $p_{n,j} = P(A_{n,j})$ et $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$.

On suppose que:

- (M_n) est croissante et $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- $\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0$
- $\max_{1\leq j\leq M_n} p_{n,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors $(S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.

DVP

III - Comportement asymptotique.

1) Théorèmes de convergence. [LS] p 13-14 et [B L] p 132-136

Théorème 12 (Loi faible des grands nombres)

Soit (X_n) une suite de v.a iid de loi $\mathcal{B}(p)$.

Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} p$.

Application 13. Théorème de Weierstrass

Soit $f \in C^0([0,1])$. Alors f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Plus précisément, en posant $P_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$,

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$

Théorème 14 (Loi forte des grands nombres).

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a iid intégrables.

Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} E[X_1]$.

Théorème 15 (Théorème central limite)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a iid de carré intégrable.

Alors $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - E[X_1]\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,$

2) Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ [B-L] p 246

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a iid de loi de Rademacher de paramètre p.

On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour $n \geq 1$ et on note $(S_n = 0 \text{ i.s})$ l'événement

$$(S_n = 0 \text{ i.s}) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k\geq n}^{+\infty} (S_k = 0)$$

Théorème 16.

On a (i) Si $p = \frac{1}{2}$, $P(S_n = 0 \text{ i.s}) = 1$

(ii) Si $p \neq \frac{1}{2}$ $P(S_n = 0 \text{ i.s}) = 0$.

3) Ruine du joueur [OU2] p 394

Un joueur joue à pile ou face avec probabilité p contre une banque. Le joueur dispose initialement de a euros et la banque de b euros. Le joueur reçoit 1€ si la pièce tombe sur face et donne 1€ à la banque sinon.

On modélise la situation par une suite de v.a iid $(Y_n)_{n\geq 1}$ de loi de Rademacher de paramètre p et on considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnant la fortune du joueur après n parties.

$$\begin{cases} S_0 = a \\ S_n = a + \sum_{j=1}^{n} Y_j . \end{cases}$$

On pose $T = \inf \{ n \geq 1 \mid S_n = 0 \text{ ou } S_n = a+b \}$ le temps d'arrêt du jeu.

Alors on a :

Si $p = \frac{1}{2}$:

(i) $P(T < +\infty) = 1$

(ii) $P(S_T = a+b) = \frac{a}{a+b}$

(iii) $E[T] = ab$

Si $p \neq \frac{1}{2}$, on pose $q = 1-p$ donc :

(i) $P(T < +\infty) = 1$

(ii) $P(S_T = a+b) = \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$

(iii) $E[T] = \dfrac{1}{p-q}\left[(a+b)\dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} - a\right]$

Références.

[B-L] : Barbe, Ledoux, _Probabilité_, EDP Sciences, 2007

[LS] Lesigne, _Pile ou Face, une introduction aux théorèmes limites du calcul des probabilités_, Ellipses, 2001

[OU1] Ouvrard, _Probabilités 1_, Cassini, 2007

[OU2] Ouvrard, _Probabilités 2_, Cassini.

Les corrigés des exercices de [B-L] sont dans _Probabilité - exercices corrigés_, de Hervé Carrieu.

Développements leçon 249

Grégoire Kooyman et Solène Thépaut

Développement dyadique et construction d'une suite de variables de loi de Bernoulli indépendantes

Références:
Ouvrard, Probabilités 2 : 9.3 Proposition 9.18

Commençons par quelques notations.
Soit $x \in [0,1[$. On définit $R_n(x)$ et $D_n(x)$ tels que :

$$R_0(x) = x$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_n(x) = [2R_{n-1}(x)] \qquad et \qquad R_n(x) = 2R_{n-1}(x) - D_n(x)$$

Par construction, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j(x)}{2^j} + \frac{1}{2^n} R_n(x)$$

Et en faisant tendre n vers ∞, on obtient :

$$x = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{D_j(x)}{2^j}$$

On peut maintenant énoncer la propriété suivante

Propriété. *Soit l'espace probabilisé $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, P)$ où P est la restriction de la mesure de Lebesgue à $[0,1[$. Sur cet espace, la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire R_n est de loi uniforme sur $[0,1[$ et les variables aléatoires R_n et $(D_1, D_2, ..., D_n)$ sont indépendantes.*

Démonstration. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n - uplet \quad \epsilon^n = (\epsilon_1, ... \epsilon_n) \in 0,1^n$, notons $I^n_{\epsilon^n}$ l'intervalle dyadique :

$$I^n_{\epsilon^n} = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon_j}{2^j}, \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon_j}{2^j} + \frac{1}{2^n} \right[$$

Cet intervalle est constitué des réels de $[0,1[$ dont le développement dyadique commence par $0, \epsilon_1 \epsilon_2 ... \epsilon_n$.
On a

$$\bigcap_{j=1}^{n} (D_j = \epsilon_j) = I^n_{\epsilon^n}$$

Ce qui donne :

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{n}(D_j=\epsilon_j)\right]=\frac{1}{2^n}$$

Donc, pour toute partie non vide J de $\{1,2,...,n\}$, on obtient en sommant sur tous les $\epsilon_j \in J^C$:

$$P\left[\bigcap_{j\in J}(D_j=\epsilon_j)\right]=\frac{1}{2^{|J|}}$$

et en particulier, pour tout $j\in\{1,2,...,n\}$, on a :

$$P(D_j=\epsilon_j)=\frac{1}{2}$$

On obtient alors,

$$P\left[\bigcap_{j\in J}(D_j=\epsilon_j)\right]=\prod_{j\in J}P(D_j=\epsilon_j),$$

Ce qui signifie, comme on peut prendre n et J comme on veut, que les variables aléatoires D_j forment une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,\frac{1}{2})$.

• Soit I, l'application $x\mapsto x$ de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$:

$$R_n=2^nI-\sum_{j=1}^{n}2^{n-j}D_j$$

Alors, pour toute fonction f mesurable positive et tout $\epsilon^n=(\epsilon_1,...\epsilon_n)\in\{0,1\}^n$, on a :

$$\begin{aligned}E\left[f(R_n)\prod_{j=1}^{n}1_{(D_j=\epsilon_j)}\right] &= E\left[f\left(2^nI-\sum_{j=1}^{n}2^{n-j}\epsilon_j\right)\prod_{j=1}^{n}1_{(D_j=\epsilon_j)}\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}}1_{I^n_{\epsilon^n}}(x)f\left(2^nx-\sum_{j=1}^{n}2^{n-j}\epsilon_j\right)d\lambda(x)\end{aligned}$$

Soit, en faisant le changement de variable, dans l'intégrale de Lebesgue, $y=2^nx-\sum_{j=1}^{n}2^{n-j}\epsilon_j$

$$\begin{aligned}E\left[f(R_n)\prod_{j=1}^{n}1\!\!\!\!\not\,_{D_j=\epsilon_j)}\right] &= \int_{\mathbb{R}}1_{I^n_{\epsilon^n}}\left(\frac{1}{2^n}y+\sum_{j=1}^{n}\frac{\epsilon_j}{2^j}\right)f(y)\frac{1}{2^n}d\lambda(y)\\ &= \frac{1}{2^n}\int_{\mathbb{R}}1_{[0,1[}(y)f(y)d\lambda(y)\end{aligned}$$

soit encore

$$E\left[f(R_n)\prod_{j=1}^{n}1_{(D_j=\epsilon_j)}\right] = P\left[\bigcap_{j=1}^{n}(D_j=\epsilon_j)\right]\left[\int_{\mathbb{R}}1_{[0,1[}(y)f(y)d\lambda(y)\right] \qquad (1)$$

et donc, en sommant sur $\epsilon^n \in \{0,1\}^n$ dans chacun des membres de l'équation ci-dessus, on obtient :

$$E\left[f(R_n)\right] = \int_R 1_{[0,1[}(y)f(y)d\lambda(y).$$

Ceci démontre que R_n est de loi uniforme sur $[0,1[$. De plus, pour toute fonction f mesurable positive, pour toute partie J de $\{1,2,...,n\}$ et pour tout $(\epsilon_j)_{j\in J} \in \{0,1\}^J$, il vient en sommant dans chacun des membres de l'équation (1) sur tous les $\epsilon_j, j \in J^C$:

$$E\left[f(R_n)\prod_{j=1}^{n}1_{(D_j=\epsilon_j)}\right] = \left[\prod_{j\in J}P(D_j=\epsilon_j)\right]E\left[f(R_n)\right],$$

ce qui démontre que R_n et $(D_1,...,D_n)$ sont indépendants. □

On a le corollaire suivant, dont la preuve constructive donne l'existence d'une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de lois arbitraires données.

Corollaire. *Soit* $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de probabilités sur* $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. *Il existe une suite de variables aléatoires réelles* $(X_j)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *définies sur l'espace probabilisé* $([0,1[,\mathcal{B}_{[0,1[},P)$, *où* P *est la probabilité restriction de la mesure de Lebesgue à* $[0,1[$, *indépendantes et telle que, pour tout* $j\in\mathbb{N}^*$, X_j *soit de loi* μ_j.

Evénements rares de Poisson

Références:
Ouvrard, Probabilités 2, Chapitre 14, Théorèmes 14.19 et 14.20.

Théorème de Poisson. *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lambda$, où $\lambda > 0$. Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction caractéristique de X_n est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \phi_{X_n}(t) = \left[p_n e^{it} + (1-p_n)\right]^n = \left[1 + p_n(e^{it}-1)\right]^n$$

On aura besoin du lemme suivant:

Lemme. *Pour tout nombre complexe z et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \leqslant e^{|z|} - \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n$$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite de terme général $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|e^{np_n z} - (1-p_n z)^n| \leqslant e^{np_n|z|} - (1+p_n|z|)^n;$$

puisque, par hypothèse,

$$ln(1+p_n|z|)^n = n\left[\frac{\lambda|z|}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda|z|$$

on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} (1+p_n z)^n = e^{\lambda z}$$

Si on prend $z = \left[e^{it}-1\right]$, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to+\infty} \phi_{X_n}(t) = exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right].$$

Le théorème de Lévy nous permet de terminer cette preuve. $\square$

On peut généraliser ce premier théorème :

Théorème des événements rares de Poisson. *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une famille finie $\{A_{n,j} | 1 \leqslant j \leqslant M_n\}$ d'événements indépendants définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*
On pose $P(A_{n,j}) = p_{n,j}$ et on note

$$S_n = \sum_{j=1}^{M_n} 1_{A_{n,j}}.$$

On suppose que la suite de terme général M_n tend en croissant vers $+\infty$, que :

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad etque \quad \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda,$$

où $\lambda > 0$. Alors, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration. On utilise encore le théorème de Lévy. Par indépendance des $A_{n,j}, 1 \leqslant j \leqslant M_n$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi_{S_n}(t) &= \prod_{j=1}^{M_n} \phi_{1_{A_{n,j}}}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} \left[p_{n,j} e^{it} + (1 - p_{n,j})\right] \\ &= \prod_{j=1}^{M_n} \left[1 + p_{n,j}\left(e^{it} - 1\right)\right] \end{aligned}$$

Si *Log* est la détermination principale du logarithme complexe, la formule de Taylor avec reste intégral nous permet d'écrire que, pour tout z tel que $|z| < 1$, on a :

$$Log(1 + z) = z - z^2 \int_0^1 (1 - u) \frac{1}{(1 + uz)^2} du.$$

Notons $z = e^{it} - 1$; puisque $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant M_n} |p_{n,j} z| < 1/2$. Pour tout $n \geqslant N$, on a alors

$$Log[\phi_{S_n}(t)] = z \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} - z^2 \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1 - u}{(1 + u p_{n,j} z)^2} du.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \geqslant N$ et tout $u \in [0, 1]$,

$$|1 + u p_{n,j} z| \geqslant 1 - p_{n,j} |z| \geqslant \frac{1}{2};$$

on a donc, pour tout $n \geqslant N$,

$$\left| \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1 - u}{(1 + u p_{n,j} z)^2} du \right| \leqslant 2 \left[\max_{1 \leqslant j \leqslant M_n} p_{n,j}\right] \left[\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}\right].$$

D'après les hypothèses, on a donc $\lim_{n\to+\infty} Log[\phi_{S_n}(t)] = \lambda z$; autrement dit, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to+\infty} \phi_{S_n}(t) = exp\left[\lambda\left(e^{it}-1\right)\right].$$

Le théorème de Lévy nous permet de conclure la preuve.

□

Nous allons ici démontrer le Lemme 1 utilisé dans la preuve

Démonstration du Lemme. La formule du binôme de Newton donne, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{z^j}{n^j};$$

en tenant compte de l'égalité

$$\frac{\binom{n}{j}}{n^j} = \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} \left(1-\frac{k}{n}\right),$$

on a

$$e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{z^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \left[1 - \prod_{k=0}^{j-1} \left(1-\frac{k}{n}\right)\right]. \qquad (*)$$

Puisque $1 - \prod_{k=0}^{j-1} \left(1-\frac{k}{n}\right) \geqslant 0$, il en résulte que

$$\left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \leqslant \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{|z|^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n} \frac{|z|^j}{j!} \left[1 - \prod_{k=0}^{j-1} \left(1-\frac{k}{n}\right)\right],$$

ce qui donne le résultat, en utilisant $(*)$ pour $|z|$. □